

P. T. Qing

Frankfurt ^{a/m} 1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550826_0031

Pionische Atome

und Pion - Kondensation

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Physik der Johann Wolfgang
Goethe-Universität zu Frankfurt am Main

von

Ong, Piet-tjing
aus Surabaya/Indonesien

Frankfurt am Main

1976



Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs
Physik der Universität Frankfurt am Main.

Dekan: Prof. Dr. E. Schopper

Erster Gutachter: Prof. Dr. W. Greiner

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. B. Müller

Tag der mündlichen Prüfung: 15 Oktober 1976

Abstract

The energy eigenvalues of a π^- -meson in a strong external Coulomb field are calculated. The critical points of pions can be obtained either for nuclei with charge number $Z > 10^3$ or for nuclei with very high matter density.

The influence of the strong interaction between the pion and the nucleus is small compared to the electromagnetic interaction. It is shown that the influence of the strong interaction for states with $l \geq 1$ gradually becomes repulsive for higher nuclear charge Z .

On purely theoretical grounds it is speculated that pion condensation could exist in normal nuclear matter. Assuming the existence of pion condensation in nuclei one obtains wiggles in their density distribution. The theoretical calculations are compared with experiment. It is found that the strength of the pion condensation δ in finite nuclei becomes dependent on the charge number Z (or mass number A).

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite
1 <u>Einleitung</u>	5
2 <u>Gebundene Zustände von skalaren Teilchen</u>	8
2.1 Einfache Modelle	8
2.1.1 Skalare Kopplung	8
2.1.2 Minimale Kopplung	10
2.2 Der kritische Punkt eines Pions im elektrischen Feld	12
2.2.1 Das Pion im elektrischen Feld	12
2.2.2 Berechnung der Energieeigenwerte von Pionen im Kastenpotential	13
2.2.3 Berechnung der Energieeigenwerte von Pionen im Coulombpotential	18
2.2.4 Coulombpotential mit ausgedehnter Ladungsverteilung	20
2.2.5 Diskussion der Ergebnisse	22
3 <u>Das pionische Atom</u>	24
3.1 Allgemeines	24
3.2 Die elektromagnetische Wechselwirkung	26

	Seite
3.3 Die starke Wechselwirkung	27
3.3.1 Die Näherung durch ein optisches Potential	27
3.3.2 Das optische Potential der S-Wellen	29
3.3.3 Das optische Potential der P-Wellen	30
3.4 Die Klein-Gordon-Gleichung des pionischen Atoms	32
3.5 Ergebnisse und Vergleich mit experimentellen Daten	33
3.5.1 Die Energieverschiebung des 1s-Zustandes	34
3.5.2 Die Energieverschiebung des 2p-Zustandes	34
3.5.3 Die Energieverschiebung höherer Zustände	35
3.5.4 Die Linienbreite des 2p-Zustandes	36
3.6 Diskussion der Ergebnisse	37
4 <u>Pionkondensation in unendlicher Kernmaterie</u>	39
4.1 Das Modell von Migdal	39
4.2 Diskussion	44

5	<u>Pionkondensation im pionischen Atom</u>	46
5.1	Einfluß der Pionkondensation auf die Kerndichteverteilung	47
5.2	Die Normierung der Kerndichte	49
5.3	Der Einfluß der Pionkondensation auf die starke Wechselwirkung	51
5.4	Vergleich der theoretischen Rechnung mit experimentellen Ergebnissen	53
5.5	Dikussion	55
6	<u>Zusammenfassung</u>	57
	Figurenbeschreibung	61
	Figuren	64
	Anhang I	107
	Anhang II	111
	Anhang III	114
	Li teraturverzeichnis	117

1 E i n l e i t u n g =====

Pieper und Greiner [1] haben gezeigt, daß der 1s-Zustand der Elektronen im Coulombfeld für hohe Kernladungszahlen $Z \approx 170$ einen Energieeigenwert von $-2 mc^2$ unterschreitet. Auch die höheren Zustände tauchen mit erhöhter Kernladungszahl nach und nach in das negative Energie - Kontinuum ein. An solchen kritischen Punkten können Elektron-Positron-Paare spontan erzeugt werden, und der Grundzustand wird instabil. Dieser "Zusammenbruch des Vakuums" wird im Institut für Theoretische Physik der Johann Wolfgang Göthe - Universität in Frankfurt am Main in breitem Umfang erforscht [2 - 8]. Experimentell kann man diesen Effekt mit der Streuung schwerer Kerne aneinander untersuchen.

Es bietet sich nun an, ähnliche Rechnung für ein pionisches Atom durchzuführen. Wegen der großen Masse des Pions ($m_\pi c^2 \approx 140 \text{ MeV}$) wird dann jedoch - lediglich die Coulombwechselwirkung berücksichtigend - ein kritischer Punkt erst bei einer Kernladungszahl von $Z > 3000$ auftreten. Andererseits weiß man, daß ein Pion mit dem Atomkern in starker Wechselwirkung steht. Diesen Einfluß kann man mit Hilfe der Vielfach-Streuung in der Theorie berücksichtigen [18 - 21].

Es ergibt sich aber dabei eine nur relativ kleine Änderung der Energieeigenwerte (im Bereich normaler Kernladungszahlen ca. 1 - 10 %), so daß kritische Punkte nach wie vor nur bei sehr hohen Kernladungszahlen auftreten.

Die Berücksichtigung der starken Wechselwirkung erweist sich jedoch als wichtig, wenn man die experimentellen Daten über pionische Atome richtig beschreiben will. Insbesondere ist die beobachtete große Linienbreite nur dann zu erklären, wenn man weiß, daß sich das Pion für niedrige Zustände stets sehr nahe am Kern aufhält. Daher befindet es sich teilweise im Bereich der kurzreichweitigen starken Wechselwirkung und kann vom Kern absorbiert werden. M. Ericson und T.E.O. Ericson [18] benutzen für die Behandlung der starken Wechselwirkung ein optisches Potential nach Kisslinger [11]. Die Ergebnisse einer solchen Rechnung stimmen gut mit den experimentellen Messungen überein [23].

Eine ganz andere Beschreibung der Wechselwirkung zwischen einem Pion und Kernmaterie haben A.B. Migdal und andere Autoren [27 - 38] gegeben. Sie haben die Eigenschaften eines Pions in unendlich ausgedehnter Kernmaterie mit feldtheoretischen Methoden untersucht und dabei festgestellt, daß auch schon bei einer bestimmten Kerndichte ein kritischer Punkt erscheinen wird.

Dabei treten periodische Strukturen (Wiggles) in der Kerndichte auf. Diese Pionkondensation erhalten Brown et al [37, 38] bei ihren Rechnungen mit hoher Kerndichte. Über die Schockwellen-Theorie versucht man dies durch Schwerionenstreuung zu untersuchen.

Migdal [27 - 36] erhalten die Pionkondensation bei niedriger Kerndichte. Dazu gibt es bisher noch keine experimentelle Untersuchung. Zahlreiche Messungen gibt es jedoch zum pionischen Atom. Wir werden im letzten Teil dieser Arbeit die Pionkondensation in das Modell des pionischen Atoms einführen. Dabei ergibt sich ein deutlicher Einfluß der Pionkondensation auf die starke Wechselwirkung zwischen dem Kern und dem umlaufenden Pion. Mit der Einführung zweier Pionkondensationsparameter kann man möglicherweise die theoretischen Ergebnisse weiter verbessern und eine Möglichkeit finden, die Pionkondensation durch ein Experiment zu bestätigen. Dies wäre ein wichtiger Schritt bei der Erforschung der Kernstruktur.

2 Gebundene Zustände von skalaren Teilchen =====

2.1 Einfache Modelle

Theoretische Untersuchungen über Elektronen in starken äußeren elektromagnetischen Feldern zeigen, daß es kritische Feldstärken gibt, bei denen spontane Paarerzeugung auftreten kann [2-8].

Wir wollen nun in diesem Kapitel skalare Teilchen in starken äußeren Feldern untersuchen [27].

Dabei kennt man zwei verschiedene Arten der Kopplung zwischen skalaren Teilchen und äußeren Feldern:

Die skalare Kopplung, die wir für die starke Wechselwirkung benutzen und die minimale Kopplung, die wir für die elektromagnetische Kopplung benutzen.

2.1.1 Skalare Kopplung

Die Klein-Gordon-Gleichung mit einem skalar gekoppelten äußeren Feld lautet:

$$\Delta \psi + (E^2 - 1 - V(r))\psi = 0$$

mit $(\mu = c = \hbar = 1)$

(2.1)

Wenn wir für das Potential $V(x)$ einen Topf mit der Tiefe V annehmen, so ergeben die Lösungen der Differentialgleichung (2,1) den in Fig.1 dargestellten Zusammenhang zwischen den Energieeigenwerten und der Topftiefe.

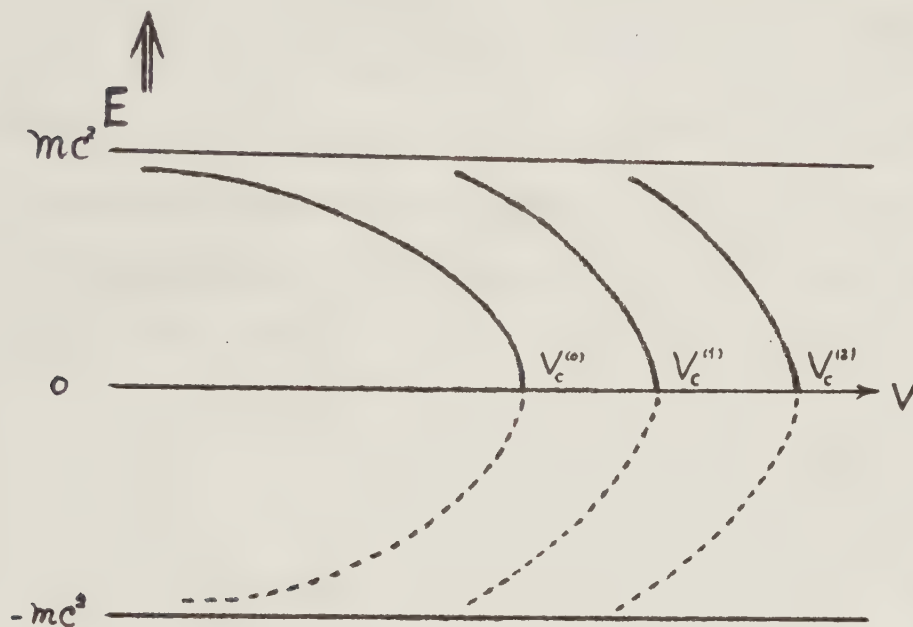


Fig.1

Das Energiespektrum ist symmetrisch zur Achse $E = 0$. Man kann die Lösungen oberhalb der Nullachse als Energieeigenwerte der Teilchen und die Lösungen unterhalb der Nullachse als die Energieeigenwerte der entsprechenden Antiteilchen interpretieren.

An einen kritischen Punkt kommt man zu ersten Mal, Wenn die Topftiefe den Wert $V = V_c^{(n)}$ erreicht. An dieser Stelle wird die Energie für die Teilchen-Antiteilchen-Erzeugung gleich Null und die Paarerzeugung kann spontan stattfinden.

2.1.2 Minimale Kopplung

Die Klein-Gordon-Gleichung mit einem minimal gekoppelten elektromagnetischen Feld lautet:

$$\Delta\psi + [(E-V)^2 - 1]\psi = 0$$

mit $(\mu = c = \hbar = 1)$

(2,2)

Wiederum unter der Annahme eines Potentialtopfes zeigt Fig.2 die Energieeigenwerte in Abhängigkeit von der Topftiefe V :

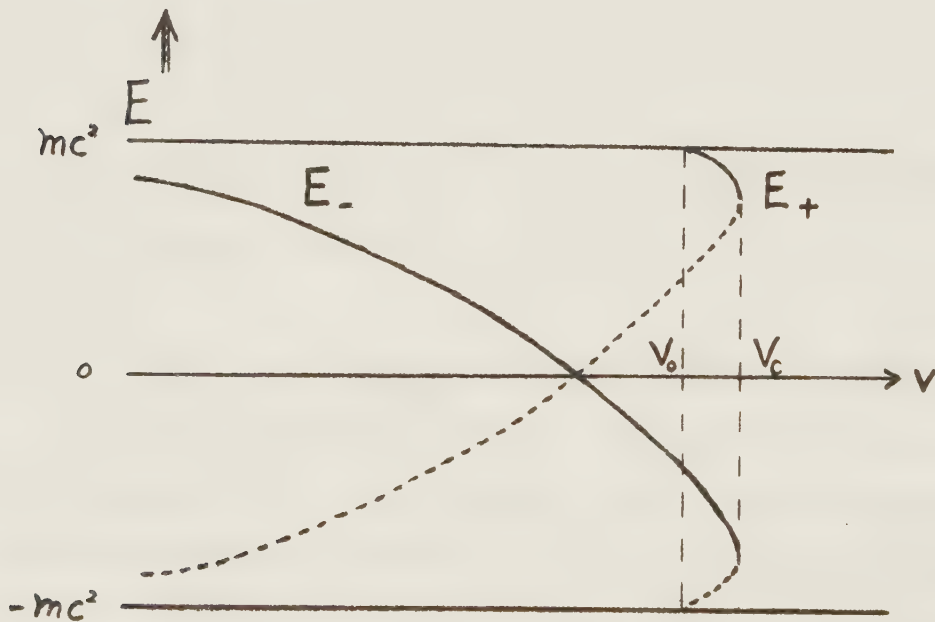


Fig.2

Da die Differentialgleichung (2,2) quadratische Terme in Energie und Potential enthält, erfüllen ab einer bestimmten Tiefe V_0 des Potentials zwei Energieeigenwerte die Gleichung. Für $V > V_c$ hat die Differentialgleichung (2,2) - ebenso wie Dgl.(2,1) - für den entsprechenden Zustand keine Lösung mehr. $V = V_c$ ist wieder ein kritischer Punkt, an dem spontane Paarbildung auftreten kann. Diesen kritischen Punkt kann man theoretisch durch die Einführung der Selbst-Wechselwirkung verhindern [2, 3, 27].

2.2 Der kritische Punkt eines Pions im elektrischen Feld

2.2.1 Das Pion im elektrischen Feld

Ein Beispiel für das oben beschriebene Modell ist ein Pion im Feld eines Atomkerns.

Dabei ist, wie im nächsten Kapitel noch genauer beschrieben wird, die elektromagnetische Wechselwirkung ein bis zwei Zehnerpotenzen größer als die starke Wechselwirkung. Wir berücksichtigen daher bei der Untersuchung der Eigenschaften eines Pions im Feld eines Atomkerns mit sehr großer Ladungszahl Z nur das elektromagnetische Feld.

Dazu verwenden wir zuerst ein einfaches Potential, den Potentialtopf. Dann kann man die Differentialgleichung noch analytisch lösen. Dagegen können wir die Lösung mit dem realistischen Coulomb-Potential nur mit numerischen Methoden finden. Wir werden allerdings feststellen, daß bei Pionen kritische Punkte erst bei einer elektrischen Ladung $Z > 3000$ auftreten (wie sie in der Natur bei Atomkernen nicht auftreten - es sei denn an der Oberfläche von Neutronensternen).

Die allgemeine Wellengleichung für ein Teilchen ohne Spin in einem elektromagnetischen Potential $A = (A_1, A_2, A_3, iA_0)$ hat in kovarianter Schreibweise die Form:

$$\left\{ \sum_{\mu=1}^4 (\hat{p}_{\mu} - \frac{e}{c} A_{\mu})^2 + m^2 c^2 \right\} \psi = 0 \quad (2,3a)$$

mit $\hat{p}_{\mu} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$ und $x_{\mu} = (x, y, z, ict)$

Im stationären Zustand vernachlässigen wir die Terme A_1, A_2, A_3 . Gleichung (2,3a) kann man dann wie folgt umformen

$$\left\{ \frac{1}{c^2} [E - eA_0]^2 + \hbar^2 \nabla^2 - m^2 c^2 \right\} \psi = 0 \quad (2,3b)$$

wobei E die Energie des stationären Zustandes ist.

2.2.2 Berechnung der Energieeigenwerte von Pionen im Kastenpotential

Für ein kugelsymmetrisches Kastenpotential ist:

$$eA_0 = -V_0 \quad \text{für } r \leq R$$

$$eA_0 = 0 \quad \text{für } r > R \quad ; \text{ wobei } R \text{ der Kernradius ist.}$$

Dann erhält man aus der Klein-Gordon-Gleichung (2,3b):

$$\begin{cases} (E - V_0)^2 - m^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \nabla^2 \} \psi = 0 & \text{für } r \leq R \\ E^2 - m^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \nabla^2 \} \psi = 0 & \text{für } r > R \end{cases} \quad (2.5a)$$

Die Kugelsymmetrie führt zu einer Trennung der Koordinaten in der Wellenfunktion:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} R_\ell(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi); \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Für ein Kastenpotential erfüllt dabei der radiale Anteil $R(r)$ die Gleichung:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 \right] R_\ell(r) = 0$$

mit

$$\begin{cases} k = k_i = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2 c^4} & \text{für } r \leq R \\ k = k_a = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{|E^2 - m^2 c^4|} & \text{für } r > R \end{cases} \quad (2.5b)$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind für $r \leq R$:

$$f_\ell(r) = f_{\text{innen}}(r) = \frac{1}{r} R_\ell(r) = \alpha j_\ell(k_i r)$$

wobei $j_\ell(k_i r)$ die Besselfunktionen und α reelle Koeffizienten sind.

Für $r > R$ gilt:

$$\begin{aligned} f_{\ell}(r) &= f_{\text{ausen}}(r) = \frac{1}{r} R_{\ell}(r) = \beta h_{\ell}''(ik_a r) \\ &= \beta [j_{\ell}(ik_a r) + i \eta_{\ell}(ik_a r)] \end{aligned}$$

wobei $h_{\ell}''(ik_a r)$ die Hankel'schen Funktionen erster Art $j_{\ell}(ik_a r)$ und $\eta_{\ell}(ik_a r)$ die Besselschen bzw. die Neumann'schen Funktionen sind.

Als Anschlußbedingungen für die Wellenfunktion an der Fläche $r = R$ muß man die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung fordern.

$$\left. \frac{j_{\ell}'(k_a r)}{j_{\ell}(k_a r)} \right|_{r=R} = \left. \frac{h_{\ell}'''(ik_a r)}{h_{\ell}''(ik_a r)} \right|_{r=R} \quad (2,6)$$

Wir wollen uns auf die S-Zustände ($\ell = 0$) beschränken.

Hier gilt für den Radialanteil der Wellenfunktion:

$$\text{innen } r \leq R : f_{\ell=0}(r) = \alpha \frac{\sin(k_a r)}{k_a r}$$

$$\text{außen } r > R : f_{\ell=0}(r) = \beta \frac{e^{-k_a r}}{k_a r}$$

Mit Hilfe der Formel (2,6) erhalten wir zur Berechnung der Energie eine Nullstellengleichung wie folgt:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{(E+V_0)^2 - m^2 c^4}}{\hbar c} R \right) + \frac{\sqrt{(E+V_0)^2 - m^2 c^4}}{\sqrt{|E^2 - m^2 c^4|}} = 0 \quad (2,7)$$

aus der die Energieeigenwerte berechnet werden.

Es muß außerdem die Normierungsbedingung erfüllt sein:

$$\int_0^\infty |f_0(r)|^2 r^2 dr = 1$$

mit $f_0(r) = \alpha j_0(k_i r) \Theta(R-r) + \beta h_0^{(2)}(i k_a r) \Theta(r-R)$

wobei die Sprungfunktion durch $\begin{cases} \Theta(x) = 1 \text{ für } x > 0 \\ \Theta(x) = 0 \text{ für } x < 0 \end{cases}$ definiert ist.

Daraus erhält man die Lösung für die Normierungskoeffizienten:

$$\alpha = \frac{k_i}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[R - \frac{1}{2k_i} \sin(2k_i R) + \frac{1}{k_a} \sin^2(k_i R) \right]}}$$

$$\beta = \frac{k_a \sin(k_i R) \exp(k_a R)}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[R - \frac{1}{2k_i} \sin(2k_i R) + \frac{1}{k_a} \sin^2(k_i R) \right]}}$$

(2,8)

Um die Energieeigenwerte in Abhängigkeit von der Kernladungszahl Z zu erhalten, setzen wir in Gleichung (2,7) die Tiefe des Potentialtopfes $V_0 = -\frac{Ze^2}{R}$ ein. Außerdem nehmen wir für den Kernradius $R = r_0 A^{1/3}$ mit $r_0 = 1,2$ fm, und berechnen die Nukleonenzahl A nach der Formel von Mosel und Fink [1]

$$A = 0,00733 Z^3 + 1,3 Z + 63,6 \text{ im Bereich } 100 < Z \leq 250.$$

Für $Z > 250$ setzen wir $A = 2,5 Z$.

Dann erhalten wir die Energieeigenwerte als Funktion von Z , wie sie in Fig.3 dargestellt sind. Bei $Z = 5150$ erreicht die Kurve fast den Rand des negativen Kontinuums. Der kritische Punkt liegt also bei sehr hohen Kernladungszahlen.

In Fig.4 sind die Energieeigenwerte für feste Beträge des Kernradius (unabhängig von Z und A) als Funktion von Z angegeben. Das bedeutet, daß der Kern für große Z stark komprimiert ist. Der kritische Punkt verschiebt sich zu kleineren Z , je kleiner der Kernradius gewählt wird, d.h. je größer die Kerndichte wird.

Die entsprechenden Ergebnisse mit noch kleineren Radien bis zu 0,25 fm sind in Fig.5 dargestellt. Bei einem Radius von 0,25 fm liegt der kritische Punkt bei $Z=246$. Die Kerndichte beträgt bei dieser Rechnung im kritischen Punkt jedoch mehr als das 200.000fache der normalen Kerndichte.

Fig.4 und Fig.5 zeigen auch, daß für $R \ll 1$ fm die kritischen Punkte, definiert durch die unendliche Steigung der Kurve, bei $E \approx -0,8 mc^2$ und für $R \gg 1$ fm bei $E \approx -mc^2$ liegen. In Fig.5 sind auch die Eigenwerte für $V = +\frac{e^2 Z}{R}$ eingezeichnet. Die Kurven spiegeln sich um die $E = 0$ Achse.

2.2.3 Berechnung der Energieeigenwerte von Pionen im Coulombpotential

Um realistischere Werte für ein Pion im elektrischen Feld eines Kerns zu erhalten, muß man das Kastenpotential durch das Coulombpotential ersetzen.

Unter Vernachlässigung der Ausdehnung des Kerns ist dann das Potential $eA_0 = -\frac{Ze^2}{r}$. Setzt man dieses Potential in die Differentialgleichung (2,3b) ein, erhält man nach einer kleinen Umformung für den Fall $E > 0$ die Radialgleichung:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1) - Z^2 \alpha^2}{r^2} + \frac{2Z\alpha E}{\hbar c r} - \frac{m^2 c^4 - E^2}{\hbar^2 c^2} \right] R_{l(n)} = 0 \quad (2.9)$$

mit der Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/\hbar c$

Die Lösung der Differentialgleichung (2,9) lautet [42]:

$$R_\ell(r) = \rho^{s+1} W(\rho) \exp(-\frac{1}{2}\rho) \quad (2,10)$$

mit $\rho = \beta r$; β und s sind folgendermaßen definiert:

$$\beta^2 = \frac{4(mc^2 - E^2)}{\hbar^2 c^2} ; s(s+1) = \ell(\ell+1) - Z^2 \alpha^2$$

$W(\rho)$ ist die konfluente hypergeometrische Funktion:

$$W(\rho) = {}_1F_1(-\lambda + s + 1, 2s + 2, \rho)$$

Die Energieeigenwerte sind:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + Z^2 \alpha^2 \lambda^{-2}}} \quad (2,11)$$

mit $\lambda = \nu + \frac{1}{2} + \sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2} ; \nu, \ell = 0, 1, 2, 3, \dots$

Da die Feinstrukturkonstante klein ist $\alpha \approx \frac{1}{137}$, ist der Parameter $Z\alpha$ für alle leichten Kerne klein gegen 1.

Wir können also die Energieeigenwerte in Gleichung (2,11) nach einer Potenzreihe von Z entwickeln.

$$E = mc^2 \left\{ 1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2} - \frac{Z^4 \alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right\} \quad (2,12)$$

wobei die Hauptquantenzahl $n = \nu + \ell + 1$ ist.

Fig.6 zeigt die Energieeigenwerte des 1s und 2p-Zustandes.

Wegen Vernachlässigung der Kernaushdehnung liefert die Gleichung (2,11) nur im Bereich kleiner Ordnungszahlen Z sinnvolle Ergebnisse. So gibt es z.B. für den 1s-Zustand ($l = 0$) nur im Bereich $Z \leq 68$ eine Lösung; für $Z > 68$ sind die Wurzeln in Gleichung (2,11) komplex. Für den 2p-Zustand gibt es bis $Z = 205$ eine Lösung.

2.2.4 Coulombpotential mit ausgedehnter Ladungsverteilung

Um die Energieeigenwerte bis zum kritischen Punkt zu berechnen, muß man bei großen Ordnungszahlen Z mit ausgedehnten Kernen rechnen. Dazu nehmen wir das Coulombpotential für eine ausgedehnte Ladungsverteilung:

$$V_c(r) = -4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right\} \quad (2,13)$$

wobei $\rho(r)$ die Fermiverteilung ist.

Für reale Kerne verwenden wir die experimentellen Daten aus [40]. Für den Halbwertsradius der Kerne mit großem Z setzen wir wie beim Kastenpotential $R = r_0 A^{1/3}$ und für die Oberflächendicke $T = 2,5 \text{ fm}$ ein.

Das Energiespektrum wird numerisch berechnet. Dabei wird nach dem Numerov-Verfahren der Radialanteil der Wellenfunktion vom Nullpunkt sowie von außen ungefähr bis zum Kernrand numerisch integriert. Die Eigenenergie wird so bestimmt, daß die logarithmische Ableitung der Wellenfunktion von innen und außen in der Nähe des Kernradius stetig ist:

$$\left. \frac{\frac{d}{dr} \phi_i(r)}{\phi_i(r)} \right|_{r=R} = \left. \frac{\frac{d}{dr} \phi_a(r)}{\phi_a(r)} \right|_{r=R} \quad (2,14)$$

Als Anfangswerte der Energie im Numerischen Verfahren nimmt man sinnvollerweise die Lösungen vom Coulombfeld einer Punktladung, bzw. die Lösungen zu niedrigeren Kernladungszahlen.

Die Energieeigenwerte für den 1s- und 2p-Zustand als Funktionen von Z zeigt Fig.7. Wie man sieht, hat sich die Kurve gegenüber dem Kastenpotential etwas nach links (zu niedrigerem Z) verschoben. Der kritische Punkt für den 1s-Zustand liegt jedoch immer noch bei $Z = 3280$ und für den 2p-Zustand bei $Z = 3435$.

2.2.5 Diskussion der Ergebnisse

Wir haben hier gezeigt, daß bei normalen Kerndichten der kritische Punkt für Pionen sowohl im Kastenpotential als auch im realistischen Coulombfeld erst mit Kernladungszahlen von mehreren Tausend erreicht wird, während er für ein Elektron schon an der Stelle $Z \approx 170$ vorkommt [1]. Den kritischen Punkt bei Elektronen kann man experimentell z.B. bei Streuungen von zwei Urankernen realisieren, für Pionen jedoch kaum. Das liegt daran, daß die Pionenmasse mit ca. 140 MeV fast 280mal größer ist als die Elektronenmasse. Um einen kritischen Punkt zu erreichen, benötigt das Pion ein wesentlich stärkeres Feld als das Elektron. Es ist nun bekannt, daß Pionen starke Wechselwirkung mit dem Kern haben. Aber dieser Effekt liefert nur einen kleinen Einfluß gegenüber der elektromagnetischen Wechselwirkung. Wir werden dieses Problem im nächsten Kapitel genauer untersuchen.

Um einen kritischen Punkt bei niedrigeren Kernladungszahlen zu erreichen, kann man den Radius verkleinern. Zu Kernladungszahlen von $Z = 200$ bis 300 kommt man dann erst für Radien $R < 1$ fm, die einer unwahrscheinlich hohen Dichte des Kerns entsprechen.

Als Beispiel zeigen wir in Fig.8 die Energieeigenwerte im doppelten Urankern: $^{235}\text{U}_{92} + ^{235}\text{U}_{92}$ gerechnet mit einem Coulomb-Potential und einer Fermiverteilung für die Kerndichte. Dabei ist der Halbwertsradius $C = r_0 A^{1/3}$ von dem normalen Wert ≈ 13 fm auf ca. 2 fm verkleinert. Für Radien $C \lesssim 2$ fm nähert sich der Kern der Gestalt eines Punktkerns. Die numerische Berechnung wird schwierig, da zum Punktkern keine Lösung für den 1s-Zustand existiert. Selbst bei einem Radius von 2 fm ist die Bindungsenergie des niedrigsten 1s-Zustandes erst auf +80 MeV gestiegen. Die Kerndichte ist dann jedoch auf das ca. 270fache gestiegen. Kritische Punkte sind also mit Pionen unvorstellbar.

3 Das Pionische Atom =====

3.1 Allgemeines

Pionische Atome gehören zu der Gruppe der exotischen Atome. Unter einem exotischen Atom versteht man, daß im Feld des positiv geladenen Atomkerns negativ geladene schwere Teilchen gebunden sind, z.B. Pionen oder Myonen. Da sie eine viel höhere Masse als Elektronen haben, sind sie auch viel näher am Atomkern als Elektronen. Die unteren Zustände von Pionen und Myonen sind so nahe am Kern, daß sie nur noch vom Kern, aber kaum noch von den weit entfernten Elektronen beeinflußt werden. Dadurch sind mit exotischen Atomen wichtige Rückschlüsse auf die Kernstruktur möglich.

Es ist bekannt, daß die myonischen Atome durch die elektromagnetische Wechselwirkung vollständig beschrieben werden. Dagegen spielt bei pionischen Atomen neben der elektromagnetischen Wechselwirkung auch die starke Wechselwirkung eine wichtige Rolle. Wir wollen in diesem Kapitel diesen Effekt genauer untersuchen.

Frühere Arbeiten auf diesem Gebiet stammen von S. Dessser et al [12], K.A. Brückner [14], D.D. Ivanenko und G.E. Pustovalov [15] und später von R. Seki und A.H. Cromer [13]. Sie gehen von den Streudaten der niederenergetischen Nukleon-Streuung aus und verwenden Störungsrechnung erster Ordnung.

Einen neuen Ansatz zur Berücksichtigung der starken Wechselwirkung in der Klein-Gordon-Gleichung lieferten M. Ericson, T.E.O. Ericson [18] und Andersen et al [19]. Eine Transformation für das dabei auftretende, nicht lokale Potential schlugen Krell und T.E.O. Ericson [20] vor und ermöglichten damit eine numerische Lösung.

Mit dieser Methode kann man gute Übereinstimmung zwischen der Theorie und dem Experiment pionischer Atome erreichen.

3.2 Die elektromagnetische Wechselwirkung

Im Kapitel 2 haben wir im Wesentlichen das Coulomb-potential behandelt.

Als nächstes können wir die Vakuumpolarisation berücksichtigen - bei der heutigen Meßgenauigkeit dürfen wir diesen Effekt nicht mehr vernachlässigen. Die Vakuumpolarisation beschreibt die virtuelle e^+e^- Erzeugung im Coulombfeld des Atomkerns, die zu einem zusätzlichen Potential führt. In erster Näherung in der Feinstrukturkonstanten α ist das Potential für sphärische Ladungsverteilung gleich [10]:

$$V_p(r) = -e^2 \frac{2\alpha}{3} \lambda_e \int \rho(r') \frac{r'}{r} [Z_1(|r-r'|) - Z_1(r+r')] dr' \quad (3.1)$$

mit der Gewichtsfunktion

$$Z_1 = \int_1^\infty \exp\left(-\frac{2}{\lambda_e} r \xi\right) \left[1 + \frac{1}{2\xi^2}\right] \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^3} d\xi$$

λ_e ist die Compton-Wellenlänge für das Elektron:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} \approx 386.16 \text{ fm.}$$

Diese Näherung wird auch für das myonische Atom benutzt. Das gesamte elektrische Potential für das Pion lautet - Gleichung (2,13) und (3,1):

$$V_{em}(r) = V_c(r) + V_p(r) \quad (3,2)$$

3.3 Die starke Wechselwirkung

Im pionischen Atom müssen wir außer der elektromagnetischen auch die starke Wechselwirkung berücksichtigen. Die Behandlung der starken Wechselwirkung ist bis heute noch nicht abgeschlossen. Man kennt nur die elementare Pion-Nukleon (πN) - Wechselwirkung aus Streudaten. Wie sieht jedoch die Wechselwirkung eines Pions mit einem Atomkern aus, der ja bekanntlich aus mehreren Nukleonen aufgebaut ist? Das ist ein Problem der Vielfach-Streuung.

3.3.1 Die Näherung durch ein optisches Potential

Man kann die Pion-Kern-Streumatrix $T_{\pi A}$ als Funktion von der Pion-Nukleon-Streuamplitude $t_{\pi N}$ und der inneren Kernstruktur, gegeben durch H_N , beschreiben [21] :

$$T_{\pi A} = T_{\pi A}(t_{\pi N}, H_N) \quad (3,3)$$

Die Berechnung von $T_{\pi N}$ ist ohne weitere Einschränkung nicht möglich. Aus der Kernphysik wissen wir, z.B. durch den großen Erfolg des Schalenmodells, daß sich die Nukleonen im Kern fast frei bewegen. Diese Tatsache berechtigt uns, den Term H_N zu vernachlässigen. Dann können wir ein optisches Potential konstruieren, das eine einfache Form hat, die nur von der elementaren π -Nukleon-Streumatrix $t_{\pi N}$ abhängt.

Weil die πN -Streuung für $E < 250$ MeV von S-Wellen und P-Wellen dominiert wird, können wir unser optisches Potential wie folgt darstellen:

$$U_{\pi A} = U_{\pi A}^{(S)} + U_{\pi A}^{(P)} \quad (3,4)$$

Der Term $U_{\pi A}^{(S)}$ wird durch die in Fig.9a dargestellten Graphen beschrieben.

Der Term $U_{\pi A}^{(P)}$ beschreibt die Gesamtheit der in Fig.9 dargestellten Graphen.

3.3.2 Das optische Potential der S-Wellen

Für den S-Wellen-Term hat M. Ericson et al [18] einen dichteabhängigen Ansatz vorgeschlagen:

$$U_{\pi A}^{(S)} = -\frac{4\pi}{2\mu_R} \left\{ b_0 \rho(\vec{r}) + b_1 (\rho_n - \rho_p) + B_0 \rho^2(\vec{r}) \right\} \quad (3,5)$$

$$\mu_R = \frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{M}} ; \quad \begin{array}{l} \mu = \text{Pionenmasse} \\ M = \text{Kernmasse} \end{array}$$

ρ_n, ρ_p sind die Neutronendichte bzw. die Protonendichte. $\rho^2(\vec{r}) = \rho_n + \rho_p$

Die Dichten sind auf die Anzahl der Nukleonen normiert. Die Koeffizienten b_0 und b_1 sind in der Näherung niedriger Kerndichte:

$$\begin{aligned} b_0 &\approx \frac{1}{2} (a_{\pi n} + a_{\pi p}) = \frac{1}{3} (a_1 + 2a_3) \\ b_1 &\approx \frac{1}{2} (a_{\pi n} - a_{\pi p}) = \frac{1}{3} (a_3 - a_1) \end{aligned} \quad (3,6)$$

$a_{\pi\pi}$ sind die NN S-Wellen-Streulänge, die wie folgt definiert sind:

$$a_{\pi\pi} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \delta_{\pi\pi, 1}^{l=0}(k)$$

δ ist die Streuphase.

Die Koeffizienten b_0, b_1 sind immer negativ, so daß das Potential $U_{\pi A}^{(s)}$ repulsiv ist. Die Energieverschiebung des 1s-Zustandes ΔE_{1s} und dessen Linienbreite Γ_{1s} sind hauptsächlich von diesem Term bestimmt. Deshalb ist die Energieverschiebung des 1s-Zustandes repulsiv.

Der imaginäre Koeffizient B_0 beschreibt die Absorption des Pions im Kern.

3.3.3 Das optische Potential der P-Wellen

Der P-Wellen-Term ist wichtig für die Zustände mit $l \geq 1$. Das nicht lokale Potential $U_{\pi A}^{(p)}$ wurde in folgender Form von Ericson et al [18] vorgeschlagen

($U_{\pi A} = U_{\pi A}^{(s)} + U_{\pi A}^{(p)}$ ist als Kisslinger Potential [11] bekannt):

$$U_{\pi A}^{(p)} = \frac{1}{2\mu_R} \nabla \frac{\mathcal{L}_0(\vec{h})}{1 + \frac{1}{3} \xi \mathcal{L}_0(\vec{h})} \nabla \quad (3,7)$$

mit $\mathcal{L}_0(\vec{h}) = 4\pi \{ C_0 \rho(\vec{h}) + C_1 (\rho_n - \rho_p) + C_2 \rho^2(\vec{h}) \}$

und

$$0 \leq \xi \leq 1 ; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{h}} .$$

Im Grenzwert niedriger Kerndichte kann man wie bei dem $U_{\pi A}^{(s)}$ Potential die Koeffizienten c_0, c_1 abschätzen:

$$c_0 \approx \frac{1}{3} [4a_{33} + 2a_{31} + 2a_{13} + a_{11}]$$

$$c_1 \approx \frac{1}{3} [(2a_{33} + a_{31}) - (2a_{13} + a_{11})]$$

wobei $a_{2I,2J}$ die πN P-Wellen-Streulänge ist.

$$a_{2I,2J} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^3} \int_{2I,2J}^{l=1} (k) \quad (3,8)$$

Der Nenner in Gleichung (3,7) mit $\xi = 1$ berücksichtigt den Lorentz-Lorenz-Effekt. Wenn wir $\xi = 0$ setzen, vernachlässigen wir diesen Effekt.

c_0, c_1 sind positiv; $V_{\pi A}^{(p)}$ ist also attraktiv.

Die Koeffizienten $b_0, b_1, c_0, c_1, B_0, C_0$ werden im allgemeinen den experimentellen Daten angepaßt.

3.4 Die Klein-Gordon-Gleichung des pionischen Atoms

Die oben beschriebenen Potentiale werden in die Klein-Gordon-Gleichung ($\hbar = c = 1$) der Pionen eingesetzt:

$$\left\{ \nabla^2 + [(E - V_m)^2 - \mu_R^2] \right\} \Psi = U_{\pi A} \Psi ; \quad \mu_R = \frac{\mu}{(1 + \mu/M)} \quad (3,9)$$

Weil das Potential $U_{\pi A}$ nicht lokal ist, ist die Differentialgleichung (3,9) im allgemeinen nicht lösbar. Für kugelsymmetrische Kerne kann man die Radialgleichung ableiten, indem man $\Psi(\vec{r}) = \phi_r(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ setzt.

Mit dem Ansatz von Ericson [18] :

$$\tilde{U}_r(r) = (1 - \alpha(r))^{\frac{1}{2}} \cdot r \cdot \phi_r(r) \quad (3,10)$$

folgt die Radialgleichung (siehe Anhang I):

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - [1 + \alpha(r)]^{-1} \left\{ \frac{\alpha'(r)}{r} + \frac{1}{2} \alpha''(r) - \left(\frac{1}{2} \alpha'(r) \right)^2 [1 + \alpha(r)]^{-1} + \beta(r) \right\} \right] \tilde{U}_r(r) = 0 \quad (3,11)$$

mit $\beta(r) = [(E - V_m(r))^2 - \mu_R^2] - U_{\pi A}^{(s)}$

Die Gleichung (3,11) ist dann lokal. Nach dieser Transformation können wir mit der normalen "Matching"-Methode die Differentialgleichung numerisch lösen (s. auch Anhang II).

3.5 Ergebnisse und Vergleich mit experimentellen Daten

Wir berechnen mit Hilfe der Gleichung (3,11) die durch die starke Wechselwirkung hervorgerufene Energieverschiebung ΔE_{ne} der elektromagnetischen Linie, sowie die auftretende Verbreiterung Γ_{ne}

$$\Delta E_{ne} = E_{ne}^{em+st.} - E_{ne}^{em.}$$

$$\Gamma_{ne} = \Gamma_{ne}^{st}, \text{ weil } \Gamma_{ne}^{em} = 0$$

in Abhängigkeit von der Kernladungszahl (bzw. der Kernmasse).

Für die Parameter im $U_{\pi A}$ -Potential wählen wir die Werte aus theoretischen Abschätzungen

$$b_0(\lambda_\pi) = -0.03 ; \quad b_1(\lambda_\pi) = -0.087 \quad \text{Im } B_0(\lambda_\pi)^4 = 0.017$$

$$c_0(\lambda_\pi)^3 = 0.21 ; \quad c_1(\lambda_\pi)^3 = 0.18 \quad \text{Im } C_0(\lambda_\pi)^6 = 0.073$$

(3,12)

und erhalten Ergebnisse, die sich gut mit den experimentellen Werten vergleichen lassen.

Ein Beispiel für den Einfluß der starken Wechselwirkung auf ein pionisches Atom zeigt Fig.10 für ${}^4\text{He} + \pi^-$ [21]

Backenstoss hat die Rechnungen auch mit Werten für die Parameter durchgeführt, die er an die experimentellen Daten angepaßt hat. Dabei ergibt sich - wie Fig. 15-19 zeigen - eine noch bessere Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment.

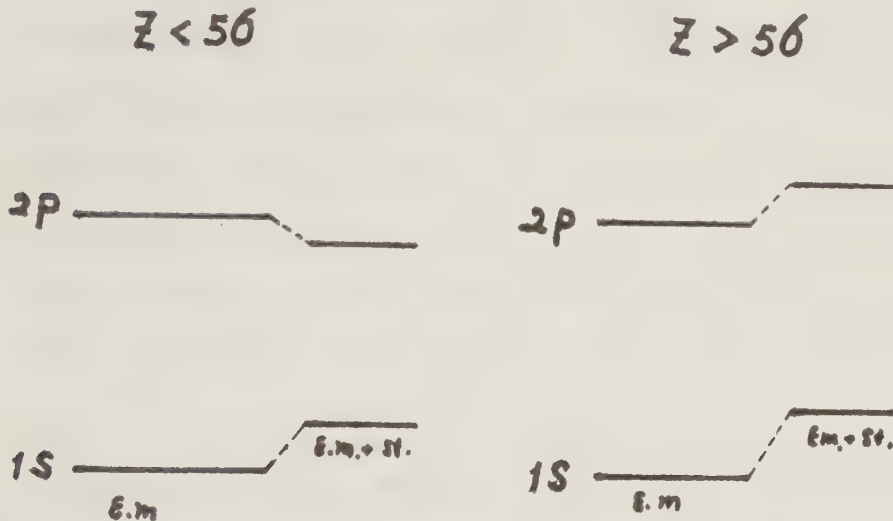
3.5.1 Die Energieverschiebung des 1s-Zustandes

In Fig.12 ist die Energieverschiebung ΔE_{1s} geteilt durch Z dargestellt. Wie oben bereits erwähnt, dominiert bei 1s-Zuständen der erste Term $U_{\pi A}^{(s)}$ des starken Wechselwirkungspotentials in der Gleichung (3,4). Daraus folgt, daß ΔE_{1s} repulsiv ist. Die repulsive Energieverschiebung vergrößert sich sehr rasch mit wachsender Kernmasse.

3.5.2 Die Energieverschiebung des 2p-Zustandes

Für den 2p-Zustand dominiert der zweite Term $U_{\pi A}^{(p)}$ in der Gleichung (3,4). Deshalb ist die Energieverschiebung attraktiv. ΔE_{2p} wächst ebenfalls mit größer werdenden Kernladungszahlen, allerdings nur bis $Z \approx 50$. Für $Z > 50$ wird das Pion durch das Coulombpotential in die Nähe des Kerns gezogen. Dabei dominiert der repulsive S-Term über den attraktiven P-Term.

Die Energieverschiebung wird sehr schnell kleiner und wechselt bei $Z \approx 56$ das Vorzeichen (siehe Fig.13). Das typische Bild für die Energieverschiebung sieht folgendermaßen aus:



3.5.3 Die Energieverschiebung höherer Zustände

Man wird erwarten, daß ein so überraschender Abfall der Energieverschiebung, wie er bei ΔE_{2p} auftritt, sich auch bei höheren Zuständen zeigen wird. Dazu wurde in Fig.14 die Energieverschiebung für 3d- und 4f-Zustände berechnet. Das Maximum von ΔE_{3d} erscheint viel später als das von ΔE_{2p} . Bei $Z = 100$ fällt ist aber noch attraktiv und ΔE_{4f} wächst noch.

3.5.4 Die Linienbreite des 2p-Zustandes

Fig.13 zeigt außer der Energieverschiebung auch noch deren Linienbreite Γ_{2p} . Γ_{2p} wächst ebenso wie ΔE_{2p} rasch mit wachsendem Z . Bei $Z = 35$ ist Γ_{2p} bereits größer als ΔE_{2p} und bei $Z = 51$ dreimal so groß. Wegen der größeren Linienbreite bzw. der kurzen Lebensdauer können heute ΔE_{2p} und Γ_{2p} nur bis $Z = 30$ gemessen werden.

In Fig.11 sind als Beispiel für die Linienbreite die Röntgenspektren von $^{16}\text{O}_\pi$ und $^{18}\text{O}_\pi$ im Energiebereich der 2p- 1s-Linie für ein pionisches Atom gegeben [23].

Wir können in den Bildern die überlagerte myonische Röntgenstrahlung sehr deutlich erkennen. Dagegen ist die Röntgenstrahlung der pionischen Atome nicht so einfach zu erkennen, weil die Linien des Spektrums sehr breit sind. Deswegen sind die Messungen bei pionischen Atomen komplizierter als bei myonischen und werden bei hohen Kernladungszahlen immer schwieriger.

3.6 Diskussion der Ergebnisse

Bei der theoretischen Behandlung pionischer Atome muß die starke Wechselwirkung berücksichtigt werden. Für dieses exakt schwer lösbare Vielteilchenproblem können wir durch die Annahme niedriger Kerndichte eine gute Näherung finden. Nimmt man weiterhin einen sphärischen Kern an, so kann man einen Ansatz für das Potential nach Ericson machen. Die numerische Rechnung zeigt eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten.

Die Energieverschiebung des $1s$ -Zustandes zeigt mit wachsendem Z einen starken Abfall. für die Zustände mit $l \geq 1$ erhält man bei kleinen Z einen Anstieg. Überraschend ergab die Theorie jedoch einen starken Abfall der Energieverschiebung für $l \geq 1$ bei bestimmten Kernladungszahlen (für $l = 1$ bei $Z \approx 50$ und für $l = 2$ bei $Z \approx 92$). Bei höheren Kernladungszahlen wird die Energieverschiebung repulsiv. Diese Erscheinung bietet uns zwei weitere Überlegungen an:

Die eine bezieht sich auf die zu Anfang behandelten kritischen Punkte. Da mit steigendem Z die Energieverschiebung der einzelnen Zustände nach und nach repulsiv wird, werden die kritischen Punkte durch Berücksichtigung der starken Wechselwirkung zu

noch höheren Kernladungszahlen hin verschoben.

Weiterhin kann man vermuten, daß die starke Wechselwirkung die Energieeigenwerte in pionischen Atomen bei großem Z so stark beeinflußt, daß sich höhere Zustände kreuzen.

4 Pionkondensation in unendlicher Kernmaterie =====

In letzter Zeit wurden theoretische Untersuchungen von A.B. Migdal [28 - 32] und anderen Autoren [33 - 38] über die Wechselwirkung des Pions in unendlicher Kernmaterie durchgeführt. Die wesentlichen Ergebnisse dieser Untersuchungen fallen unter das Stichwort "Pionkondensation". Es gibt Spekulationen, daß dieser Effekt auch in realen Kernen auftreten kann. Dies hat dann Auswirkungen auf unser Modell des pionischen Atoms. Deshalb wollen wir in diesem Kapitel nach Migdal darstellen, wie es zur Pionkondensation kommt.

4.1 Das Modell von Migdal

In unendlich ausgedehnter Kernmaterie wird die Energie eines Pions durch die Dispersionsgleichung bestimmt:

$$\omega^2 = 1 + k^2 + \pi(k, \omega) \quad (4.1)$$

mit $(\hbar = \mu = c = 1)$, μ ist die Mesonenmasse.

Dabei ist $\pi(k, \omega)$ der mesonische Polarisationsoperator und k der Impuls.

Nach A.B. Migdal setzt sich der Polarisationsoperator aus drei Haupttermen zusammen, die er in der Näherung niedriger Dichte berechnet [28, 29, 32].

$$\Pi = \Pi_S + \Pi_P + \Pi_{33} \quad (4,2)$$

Diese werden durch die folgenden Feynman-Graphen dargestellt:

$$\Pi_S = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2}$$

beschreibt den ρ -Mesonen-Austausch bei πN -Streuung.

$$\Pi_P = \text{Diagram}$$

gibt den Teilchen-Loch-Übergang.

$$\Pi_{33} = \text{Diagram}$$

beschreibt die Anregung einer Δ -Resonanz.

Für den S-Wellen-Term π_s setzt Migdal:

$$\pi_s \approx 1.4 (n_N - n_p) \omega$$

mit der Neutronen-Protonen-Dichte n_N, n_p .

Für $N \gg Z$ (wie z.B. in Neutronensternen) ist:

$$\pi_s \approx 1.4 n_N \omega$$

Für $N = Z$ ist:

$$\pi_s = 0.$$

Der P-Wellen-Term π_p ist für negative bzw. positive Pionen gleich:

$$\pi_p^\mp = \frac{2n f^2 k^2}{\pm \omega + k^2/2m}$$

mit der Kopplungskonstanten $f^2 \approx 1$

der Nukleonenmasse m

und der Kerndichte n

Für das neutrale Pion ist der Polarisationsoperator das Mittel von π^+ und π^-

$$\pi_p^0 = \frac{1}{2} (\pi_p^+ + \pi_p^-)$$

Die Δ_{33} -Resonanz beschreibt man durch:

$$\pi_{\Delta_{33}}^{\mp} = -0.75 n k^2 \left(\frac{3}{\omega_R \mp \omega} + \frac{1}{\omega_R \pm \omega} \right)$$

$$\pi_{\Delta_{33}}^0 = -3 n k^2 \frac{\omega_R}{\omega_R^2 - \omega^2}$$

wobei die Resonanzenergie ω_R ungefähr 2,4 ist (die Massendifferenz zwischen Δ_{33} und N ist 2,1 Pionenmassen).

Setzt man Gleichung (4,2) in Gl. (4,1) ein, so gewinnt man für N $\rightarrow$ Z folgende Dispersionsgleichung:
für $\pi^{\mp}$ Mesonen:

$$\omega^2 = 1 + k^2 \pm 1.4 n \omega - 0.75 \left(\frac{3}{\omega_R \mp \omega} + \frac{1}{\omega_R \pm \omega} \right) n k^2 - \frac{2 n f^2 k^2}{\pm \omega + k^2/2m}$$

(4,3)

für π^0 Mesonen

$$\omega = 1 + k^2 - 3 n k^2 \frac{\omega_R}{\omega_R^2 - \omega^2} - n f^2 k^2 \left(\frac{1}{\omega + k^2/2m} - \frac{1}{\omega - k^2/2m} \right)$$

(4,4)

In Fig.20 ist die Dispersionsrelation für ein π^0 -Meson und $n = n_0 = 1$ (normale Kerndichte) aufgetragen.

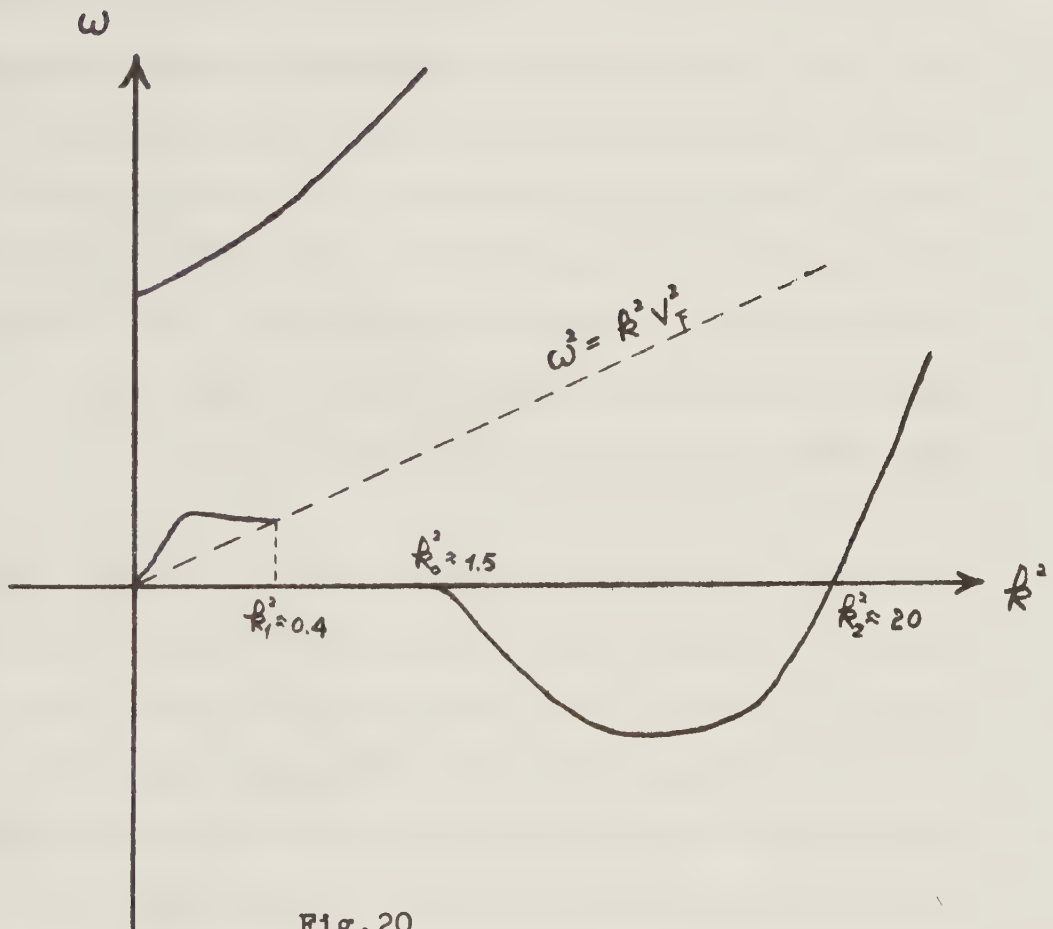


Fig.20

4.2 Diskussion

In Fig.20 sieht man, daß das Spektrum zwei Zweige hat. Den Bereich $k^2 < k_0^2$ nennt man "Meson-Branch". Zwischen $k_0^2 \leq k \leq k_1^2$ erscheint ein instabiler Bereich (komplexe Energie) im pionischen Spektrum. An der Stelle $k^2 = k_0^2$ wird die Energie des Pions $\omega = 0$; der Zustand wird kritisch, da die Pionen in diesem Zustand ohne Energie - also spontan - erzeugt werden können. Diese Erscheinung nennt man "Pionkondensation". Es gibt diese Pionkondensation auch für π^+ und π^- .

Inzwischen wurde auch mit besseren Modellen für den pionischen Polarisationsoperator gerechnet. V. Ruck et al [37] führten eine Temperaturabhängigkeit des Operators $\Pi(\omega, k, T)$ ein. M. Gyulassy untersucht die Anwendbarkeit des Modells auf räumlich begrenzte Kernmaterie, um mit dieser Theorie eine Erklärung für die "Schock-Welle" bei der Kern-Kern-Streuung zu finden. Bei ihren Rechnungen zeigt das Spektrum der Pionen qualitativ das gleiche Verhalten, wie es in Fig.20 dargestellt ist. Es verschiebt sich nur der kritische Punkt bei k_0 ein wenig.

Die bei der Pionkondensation im Kern auftretenden Pionen wirken sich auf den Nukleonenpropagator aus. Die Rechnungen ergeben Schwankungen der Nukleondichte (Wiggles), die wir in unserer Arbeit in reellen Kernen untersuchen und mit experimentellen Daten vergleichen werden.

5. Pionkondensation im pionischen Atom =====

Migdal und andere Autoren [28 - 38] haben im Rahmen der Quantenfeldtheorie die Pionkondensation vorausgesagt. Die Schwankungen der Dichteverteilung, die sie dabei finden, konnten jedoch noch nicht experimentell nachgeprüft werden. Andererseits sind Messungen an pionischen Atomen schon in großem Umfang durchgeführt worden. Daher bietet sich die Möglichkeit an, beim Modell des pionischen Atoms die Pionkondensation zu berücksichtigen, um dadurch indirekt das Auftreten von Pionkondensation durch Messungen an pionischen Atomen zu testen.

Wir wollen daher in diesem Kapitel die Pionkondensation in das Modell einführen, wie es im Kapitel 3 beschrieben ist. Dabei gehen wir von dem Einfluß der Pionkondensation auf die Dichteverteilung der Nukleonen in unendlicher Kernmaterie aus und übertragen diese Erscheinung auf den endlichen Atomkern.

5.1 Einfluß der Pionkondensation auf die Kern- dichteverteilung

Wir betrachten also den Nukleonenpropagator in unendlich ausgedehnter Kernmaterie.

Da im kritischen Zustand sehr viele Pionen mit dem Impuls k_0 existieren, propagieren die Nukleonen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{Propagator} &= G_0 + \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \dots \\
 & \quad \text{Diagram 1: } \text{Pion loop with } k_0 \text{ and } k_0 \\
 & \quad \text{Diagram 2: } \text{Pion loop with } k_0, k_0, k_0
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Vernachlässigen wir die höhere Terme in Gleichung (5,1), dann kann man die Kerndichte nach Migdal herleiten [30]:

$$n(\vec{n}) = n_0 (1 + \delta \cos 2 \vec{k}_0 \cdot \vec{n})$$

mit

$$\delta_0 = \frac{3 f^2 a^2 k_0^2}{16 E_F} \frac{1}{[1 + g \bar{\phi}(k_0/2p_F)]^2}$$

$$k_0 \ll p_F ; \quad \delta \approx 1.65 \delta_0, \quad k_0 = p_F$$

und

$$[1 + g \bar{\phi}(k_0/2p_F)]^{-1} \approx 1/2.2 ; \quad a^2 \approx 0.04$$

(5,2)

wobei g^* die Spin-Spin-Wechselwirkungskonstante

$$g^{(0)} \approx 0.8 P_F ; \quad g^{(k)} < g^{(0)}, \quad k \approx P_F$$

und die Funktion

$$\Phi(k, \omega) = \frac{2\pi^2}{m P_F} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n_0(p) - n_0(\vec{p} - \vec{k})}{\varepsilon(\vec{p} - \vec{k}) - \varepsilon(p) + \omega} \quad (5.3)$$

ist.

Dabei ist n_0 die Kerndichte ohne die Pionkondensation und δ steht für die Stärke des Kondensationseffektes. Theoretische Abschätzungen nach Migdal [30] geben für δ in unendlicher Kernmaterie einen Wert von ca. 0,08.

Um eine kugelsymmetrische Formulierung zu erreichen, transformiert man die Gleichung (5,2) in Kugelkoordinaten und kommt dann zu dem radialen Anteil:

$$n(r) = n_0 \left(1 + \delta \frac{\sin 2k_0 r}{2k_0 r} \right) \quad (5.4)$$

Diese Gleichung können wir auf einen räumlich begrenzten Kern übertragen, indem wir statt der konstanten Dichte n_0 die Nukleonendichte $\rho_0(r)$ des Kerns einsetzen:

$$\rho(r) = \rho_0(r) \left(1 + \delta \frac{\sin 2k_0 r}{2k_0 r} \right) \quad (5.5)$$

5.2 Die Normierung der Kerndichte

Die so gewonnene Dichteverteilung muß noch neu normiert werden. Mit dem alten Normierungsfaktor ergibt die Integration über die Ladungsverteilung nämlich nicht mehr genau die Protonen- und Neutronenzahl. Außerdem ergibt die neue Verteilung auch einen anderen Wert für den mittleren quadratischen Radius. Wir müssen also in die alte Verteilung $\rho_0(r)$ solche Werte für die Normierungskonstante und die Halbwertsbreite C einsetzen, so daß sich die Nukleonenzahlen wieder richtig ergeben und der mittlere quadratische Radius wieder mit dem experimentellen Wert übereinstimmt. Diese Rechnung kann man nur numerisch durchführen - (siehe Anhang III). Dabei benutzen wir für die Oberflächendicke die alten Werte, da die experimentellen Werte sehr ungenau sind (ca. 20%) und der Einfluß auf die Rechnung relativ gering ist.

Mit der Dichteverteilung, die man auf diese Weise neu erhalten hat, kann man die Rechnung für die Energieeigenwerte des pionischen Atoms, wie sie im Kapitel 3 gezeigt wurde, nochmals durchführen. Dabei ergibt sich für den Coulomb-Anteil keine Änderung, wenn man die neue Ladungsverteilung richtig normiert

und an den mittleren quadratischen Radius aus den Experimenten angepaßt hat. Führt man die oben beschriebene Anpassung der Halbwertsbreite nicht durch, so ändert sich der Coulomb-Anteil so stark, daß er den Effekt der starken Wechselwirkung völlig überdeckt.

5.3 Einfluß der Pionkondensation auf die starke Wechselwirkung

Wir haben die Wiggles, die bei der Pionkondensation in der Dichteverteilung des Kerns auftreten, so in das pionische Atom eingeführt, daß sie keinen Einfluß auf die elektromagnetische Wechselwirkung haben. Ihren Einfluß auf die starke Wechselwirkung zeigt Fig.21. Dort sind die Energieverschiebung und die Linienbreite sowie deren relative Änderungen (bezogen auf $\delta = 0$) für den 1s-Zustand von $^{23}\text{Na}_{11}$ mit verschiedenen δ -Werten tabelliert. Außerdem sind die relativen Änderungen in Abhängigkeit von δ graphisch aufgetragen. Fig.22 - 27 zeigen die entsprechenden Tabellen und Kurven für 2p-, 3d- und 4f-Zustände von verschiedenen Kernen. Für die Rechnungen wurden unterschiedliche Verteilungen von Protonen und Neutronen berücksichtigt und für die Parameter in Gleichung (3,12) die Werte nach Elton [40] verwendet. Alle Bilder zeigen für die Änderungen ΔE_{ne} und Γ_{ne} eine fast lineare Abhängigkeit von δ zumindest bei kleineren δ .

Eine andere Darstellung der Ergebnisse geben die folgenden Bilder. In Fig.28 ist die relative Änderung von ΔE_{ne} und in Fig.29 die relative Änderung von Γ_{ne} beim 2p-Zustand mit $\delta = 0,1$ (bzw. $\delta = 0,05$) in Abhängigkeit von der Kernladungszahl Z gezeigt.

Fig.30 - 33 geben die entsprechenden Werte für den 3d- und 4f-Zustand.

Es fällt auf, daß die relativen Änderungen bei verschiedenen Z verschiedene Vorzeichen haben, d.h. daß die Wiggles je nach Kernladungszahl die starke Wechselwirkung mal verstärkend, mal abschwächend beeinflussen. Warum dieser Zusammenhang so kompliziert ist, wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die Dichteverteilung der Nukleonen durch die Wiggles neu normiert und angepaßt werden mußte. So wird auch eine Änderung der Neutronenzahl (Auswahl anderer Isotope) und ein anderer Wert für den Pionkondensationsparameter k_0 sich deutlich auf die Änderung von ΔE_{ne} und Γ_{ne} auswirken. Die Rechnungen wurden alle mit $k_0 = 1,3 \text{ fm}^{-1}$ gemacht.

5.4 Vergleich der theoretischen Rechnung mit den experimentellen Ergebnissen

Wir haben gezeigt, daß die Pionkondensation durch die Wiggles in der Kerndichteverteilung einen Einfluß auf die starke Wechselwirkung hat. Diesen Einfluß wollen wir jetzt mit den experimentellen Daten von Backenstoss [23] vergleichen.

Fig.34 zeigt wie schon in Fig.15 die Meßergebnisse von Backenstoss für die Energieverschiebung des 2p-Zustandes im Bereich $13 \leq Z \leq 30$. Die Ergebnisse seiner theoretischen Rechnung sind gestrichelt eingezeichnet. Aus dieser Rechnung mit gleicher Dichteverteilung für Protonen und Neutronen erhalten wir die durchgezogene Linie, wenn wir die Pionkondensation mit $\delta = 0,12$ und $k_0 = 1,2$ fm berücksichtigen und leicht geänderte Werte für die Parameter b_0, b_1, c_0, c_1, B, C benutzen. Wie man sieht, erhält man mit diesen Werten eine noch bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment als ohne die Berücksichtigung der Pionkondensation im Kern.

Die Ergebnisse für den 4f-Zustand im Bereich $73 \leq Z \leq 92$ sind in Fig.36 aufgetragen.

Man erhält wiederum eine verbesserte Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, wenn man mit $\delta = 0,20$ und $k_0 = 1,3$ fm rechnet.

Für den 3d-Zustand zeigt Fig.35 die Ergebnisse.

Es ist nicht erstaunlich, daß für kleine Z ($13 \leq Z \leq 30$) und große Z ($73 \leq Z \leq 92$) unterschiedliche Werte für zu guten Ergebnissen führen. Man wird von Anfang an vermuten, daß die Stärke der Pionkondensation bei kleineren Kernen geringer ist. So paßt zu den beiden Werten von δ die Vermutung, daß δ proportional zum Kernradius sein könnte (d.h. $\delta \sim 0,033 \cdot A^{1/3}$).

5.5 Diskussion

Die numerischen Ergebnisse geben einen deutlichen Einfluß der Pionkondensation im Kern auf die starke Wechselwirkung. So ist z.B. mit $\delta = 0,1$ bei 2p-Zustand von $^{40}\text{Ca}_{20}$ die Änderung der Energieverschiebung (ca. 34 %) und die Änderung der Linienbreite (ca. 32%) größer als der Fehler beim Experiment. Ein vollständiger Fit über das ganze Periodensystem kann daher Aufschluß über das Vorhandensein eines Pionkondensates geben.

Damit gehen in die Berechnung der Übergangsenergien des pionischen Atoms zwei neue Parameter wesentlich mit ein, nämlich δ und k_0 . Die Anpassung dieser Parameter läßt Rückschlüsse auf die Existenz der Pionkondensation im realen Kern zu und gibt damit eine Aussage über die Kernstruktur. Leider reicht die Genauigkeit der Fits noch nicht aus, um über δ und k_0 Rückschlüsse auf die Pion-Nukleon-Wechselwirkung zu ziehen.

Zur weiteren Entwicklung des Modells sollte man auch die Piondichte ρ_π im Kern berücksichtigen. Das würde dann zu einer Verbesserung des optischen Potentials führen.

Weiterhin müßte man das Modell noch durch die Berücksichtigung der Schalenstruktur des Kerns verbessern. Diese liefert nämlich ebenfalls eine oszillierende Dichteverteilung; die Amplitude entspräche aber nur einem $\delta_i \sim 0,03 - 0,05$.

Mit einem so verbesserten Modell und vor allem mit genaueren Meßergebnissen könnten wir dann sehr genaue Werte für die Pionkondensationsstärke δ erhalten. Dies ließe dann Aussagen über die Kopplungskonstante g zu.

6 Zusammenfassung =====

Wir haben zuerst das Energiespektrum eines skalaren Teilchens im äußeren Feld betrachtet. Dabei stellten wir fest, daß in extrem starken Feldern der Zustand des Teilchens kritisch werden kann. Weiterhin untersuchten wir das pionische Spektrum im externen elektromagnetischen Feld. Analytisch kann man dabei noch die Energieeigenwerte zu einem Kastenpotential und zum Coulombpotential einer Punktladung berechnen. Bei einer Punktladung gibt es die niedrigen Zustände allerdings nur im Bereich kleiner Kernladungszahlen Z . So existiert z.B. der $1s$ -Zustand nur für $Z \leq 68$. Man erhält die niedrigen Zustände auch für höhere Kernladungszahlen, wenn man ein realistisches Coulombpotential zugrunde legt. Die Klein-Gordon-Gleichung kann man jedoch nur numerisch lösen. Die theoretischen Rechnungen zeigen dabei, daß kritische Zustände für Pionen erst bei Kernladungszahlen von mehreren Tausend oder bei über hundertfach größerer Kerndichte auftreten.

Danach haben wir die starke Wechselwirkung zwischen Pion und Kern im Modell des pionischen Atoms berücksichtigt. Das Vielteilchenproblem der Pion-Kern-Wechselwirkung behandelten wir in der Näherung niedriger Kerndichte.

Dann kann man ein dichteabhängiges optisches Potential nach Kisslinger ansetzen. Das nicht-lokale Potential, das sich dann ergibt, wurde durch einen Ansatz von Ericson in ein lokales Problem transformiert. Damit ist eine numerische Lösung möglich. Die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Potential und starker Wechselwirkung wurde mit dem Programm "PIATOM" von Krell nach dem Verfahren von Blatt gelöst. Die Werte, die man auf diese Weise erhält, zeigen eine recht gute Übereinstimmung mit den Messungen.

Bei den $1s$ -Zuständen sind die Energieverschiebungen der starken Wechselwirkung repulsiv, bei Zuständen mit $l \geq 1$ sind sie attraktiv. Jedoch ergab sich ein überraschender Effekt; bei großen Kernladungszahlen fallen die Energieverschiebungen auch für $l \geq 1$ sehr rasch ab und werden nacheinander repulsiv. Dadurch werden die kritischen Punkte zu noch höheren Kernladungszahlen verschoben. Man kann also nicht erwarten, für ein pionisches Atom einen realistischen kritischen Punkt zu finden.

Im vierten Kapitel haben wir die Eigenschaften von Pionen in unendlicher Kernmaterie nach Migdal untersucht. Dabei wurde der π -mesonische Polarisationsoperator durch die Näherung für den S-Wellen, P-Wellen und Δ_{33} Resonanzterm dargestellt. Es zeigt sich, daß auch bei normaler Kerndichte bei $k_0 \approx 1,3 \text{ fm}^{-1}$ ein kritischer Zustand auftritt, die Pionkondensation. Dabei entstehen Schwankungen in der Dichteverteilung der Nukleonen.

Daher haben wir im fünften Kapitel angenommen, daß auch in räumlich begrenzten Kernen Pionkondensation auftreten kann. Dies führten wir dann über die Dichteschwankung im Kern in das Modell des pionischen Atoms ein. Die neue Kerndichteverteilung muß man aber richtig normieren und an den mittleren quadratischen Radius nach Streuexperimenten anpassen. Dann ergibt sich kaum ein Einfluß auf die elektromagnetische Wechselwirkung. Doch macht sich die Pionkondensation deutlich bei der starken Wechselwirkung bemerkbar. So lassen theoretische Abschätzungen 30 % Änderung in der Energieverschiebung und in der Linienbreite durchaus möglich erscheinen.

Außerdem gehen jetzt in die Rechnung zum pionischen Atom zwei neue Parameter, δ und k_0 ein. Damit kann man das theoretische Modell besser an die experimentellen Ergebnisse anpassen. Es bietet sich so die Möglichkeit, aus experimentellen Daten Rückschlüsse auf die Werte von δ und k_0 zu erhalten und somit die theoretische Vorhersage der Pionkondensation an realen Kernen zu überprüfen. Zu dieser Vorhersage paßt unser Ergebnis, daß sich mit $\delta = 0,12$ (0,20) bei kleinen (großen) Z gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ergibt.

Man kann das Modell des pionischen Atoms noch weiter verbessern. So erscheint es sinnvoll, wie zum Schluß angedeutet wurde, auch die Dichteverteilung der Pionen im Kern in das optische Potential einzuführen.

F I G U R E N B E S C H R E I B U N G

Fig.3) Die Energie eines π^- im 1s-Zustand in Abhängigkeit von der Kernladungszahl Z gerechnet mit einem Kastenpotential der Tiefe $V_0 = -\frac{Ze^2}{R}$ und dem Radius $R = 1,2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$
 $A = 0,00733 Z^2 + 1,3 Z + 63,6$ für $100 < Z \leq 250$
 $A = 2,5 Z$ für $Z > 250$

Fig.4) Wie fig.3 mit festem Radius $R = 15/10/7,5/5/4/3/ \text{ fm}$

Fig.5) Wie Fig.4 $R = 3/2/1,5/1,0/0,75/0,5/0,25 \text{ fm}$

Fig.6) Die Energie eines π^- im 1s-Zustand bzw. 2p-Zustand gerechnet mit dem Coulombfeld einer Punktladung

Fig.7) Die Energie eines π^- im 1s- bzw. 2p-Zustand, gerechnet mit dem Coulombfeld einer ausgedehnten Ladungsverteilung. Für die Ladung wurde eine Fermiverteilung mit dem Halbwertradius $C = r_0 A^{1/3}$ und der Oberflächendicke $T = 2,5 \text{ fm}$ benutzt.
 $A = 0,00733 Z^2 + 1,3 Z + 63,6$ für $100 < Z \leq 250$
 $A = 2,5 Z$ für $Z < 250$

Fig.8) Die Energie eines π^- im 1s- bzw. 2p-Zustand beim doppelten Urankern in Abhängigkeit vom Halbwert-radius C .

Fig.9) Die wichtigsten Graphen für das optische Potential im pionischen Atom - a) für S-Wellen; a) und b) für P-Wellen [21]

Fig.10) Die 1s- und 2p-Energieeigenwerte beim pionischen ${}^4\text{He}$ [21].

Fig.11) Das Röntgenstrahlenspektrum von ${}^{16}\text{O}_\pi$ und ${}^{18}\text{O}_\pi$ im Energiebereich der π^- 2p $\rightarrow$ 1s Linie [23].

Fig.12) Die Energieverschiebung ΔE_{1s} des 1s-Zustandes durch die starke Wechselwirkung

$$\frac{\Delta E_{1s}}{Z^4} \text{ ist gegen } A \text{ bzw. } Z \text{ aufgetragen}$$

Fig.13) Die Energieverschiebung ΔE_{2p} und die Linienbreite Γ_{2p} des 2p-Zustandes

Fig.14) Die Energieverschiebung des 3d- und 4f-Zustandes

Fig.15) - 19) Die Messergebnisse und Rechnungen von Backenstoss [23] für die Energieverschiebung und Linienbreite

Fig.21) Die Änderung der Energieverschiebung und der Linienbreite durch Einführung der Pionkondensation prozentual aufgetragen gegen die Pionkondensationsstärke δ .

Fig.22) Wie Fig.21 für 2p-, 3d-, 4f-Zustände von ${}^{23}\text{Na}_{11}$

Fig.23)
bis Fig.27) Wie Fig.22 für $^{31}\text{P}_{15}$, $^{40}\text{Ca}_{20}$, $^{60}\text{Ni}_{28}$, $^{82}\text{Sn}_{38}$, $^{115}\text{In}_{49}$.

Fig.28) Die relative Änderung der Energieverschiebung der 2p-Zustände für $\delta = 0,05$ und $\delta = 0,1$ in Abhängigkeit von der Kernladungszahl Z

Fig.29) Die relative Änderung der Linienbreite des 2p-Zustandes für $\delta = 0,05$ und $\delta = 0,1$ in Abhängigkeit von der Kernladungszahl Z

Fig.30) Wie Fig.28 für den 3d-Zustand

Fig.31) Wie Fig.29 für den 3d-Zustand

Fig.32) Wie Fig.28 für den 4f-Zustand

Fig.33) Wie Fig.29 für den 4f-Zustand

Fig.34) Die Energieverschiebung des 2p-Zustandes in Abhängigkeit von Z .

Es werden die Rechnungen mit Berücksichtigung der Pionkondensation (durchgezogene Linie) und die Rechnungen von Backenstoss (gestrichelte Linien) mit den experimentellen Daten verglichen

Fig.35) Wie Fig.34 für den 3d-Zustand

Fig.36) Wie Fig.35 für den 4f-Zustand

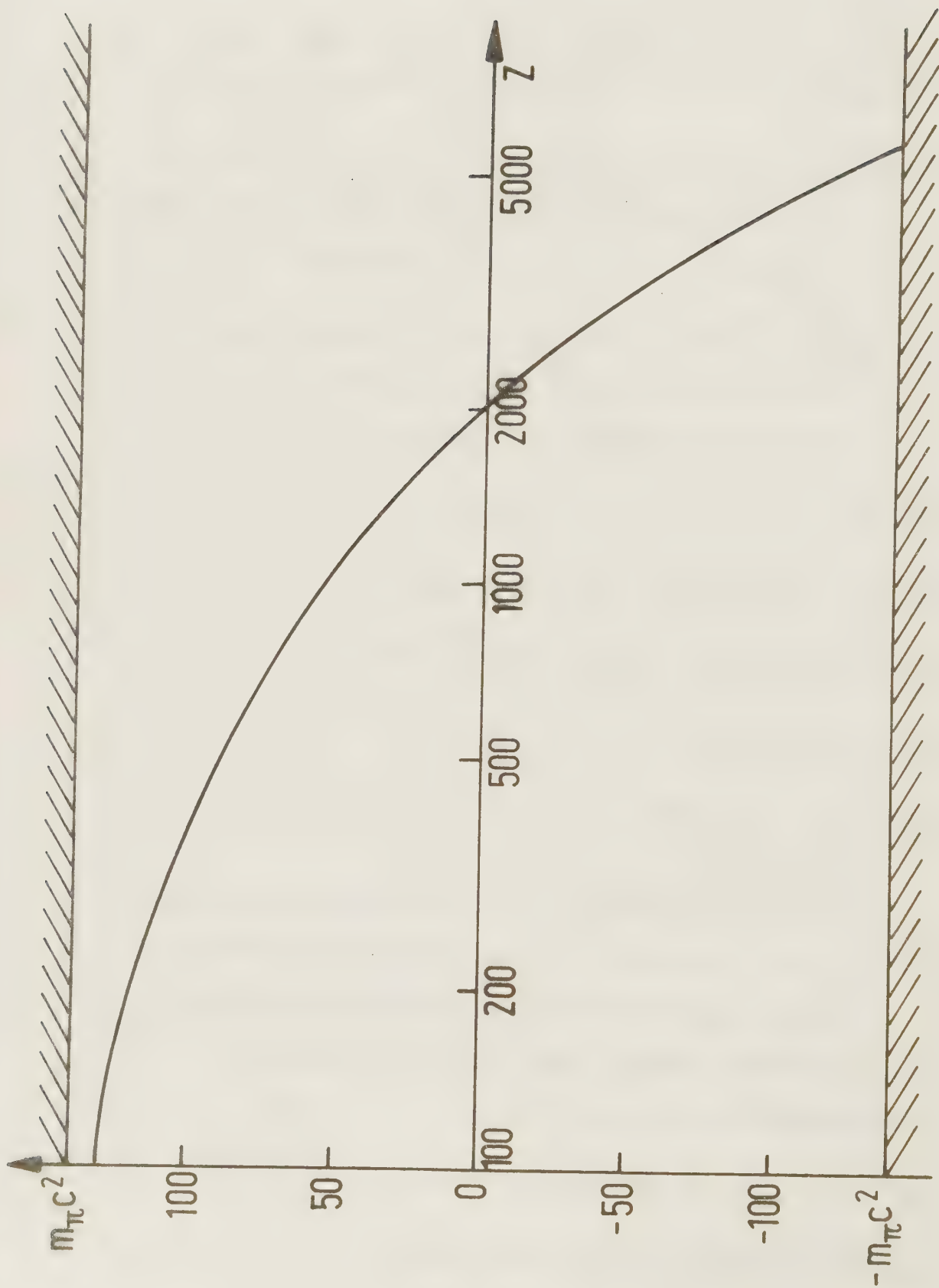


Fig.3

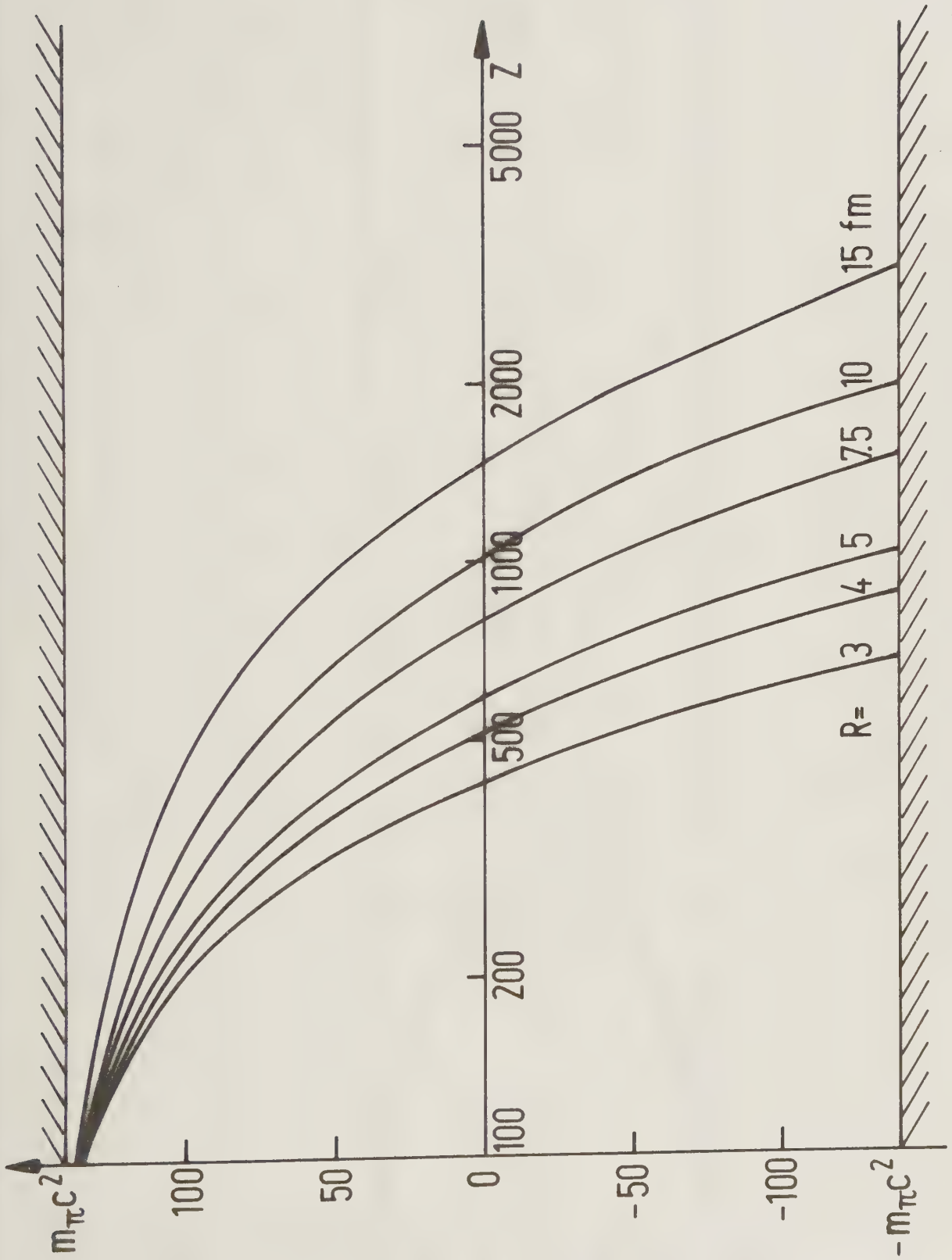


Fig.4

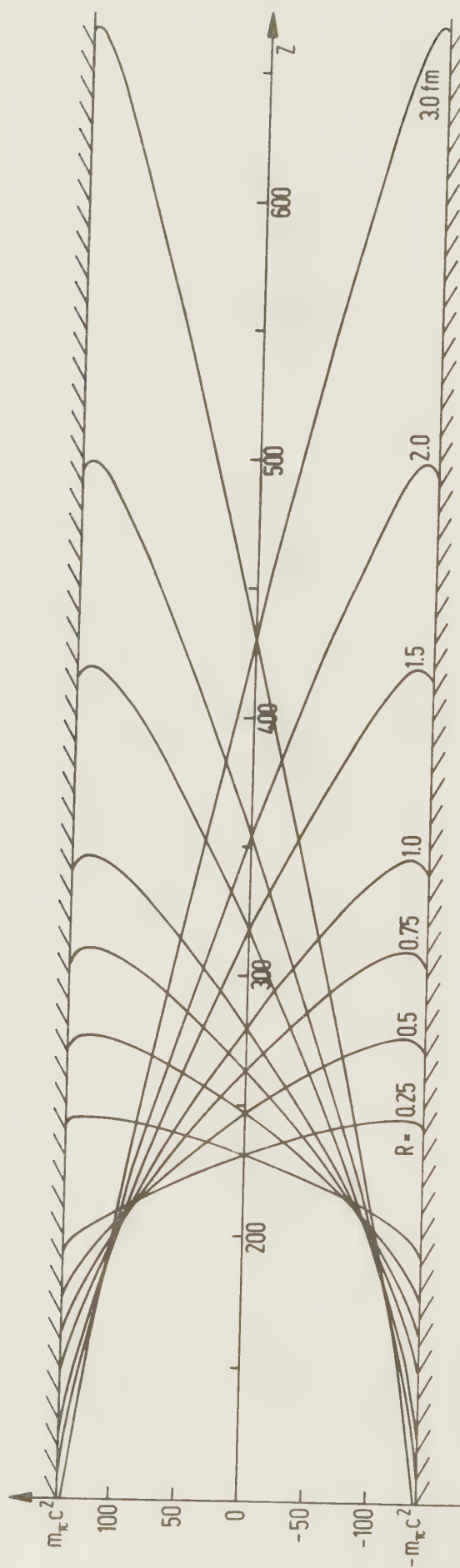


Fig. 5

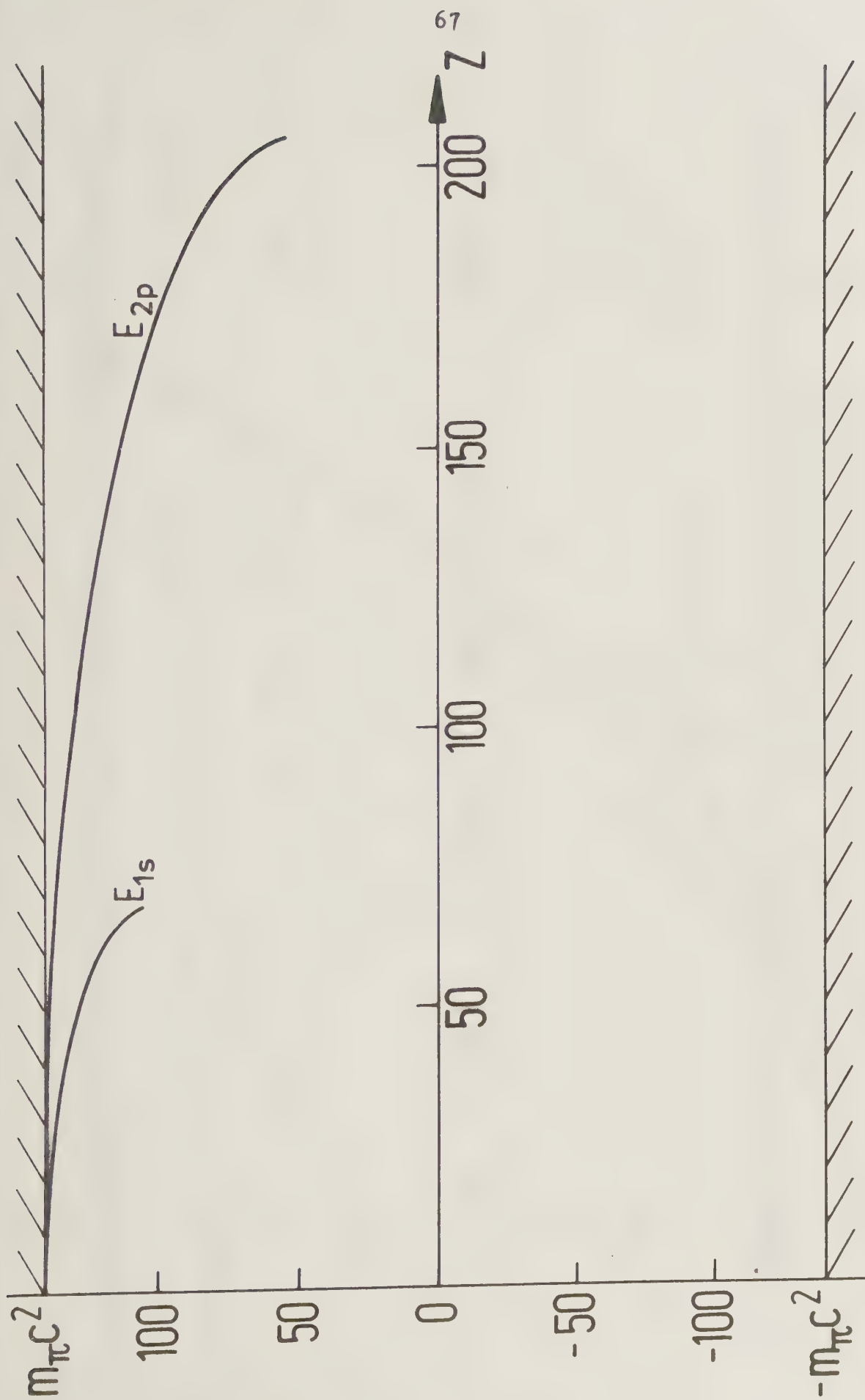


Fig.6

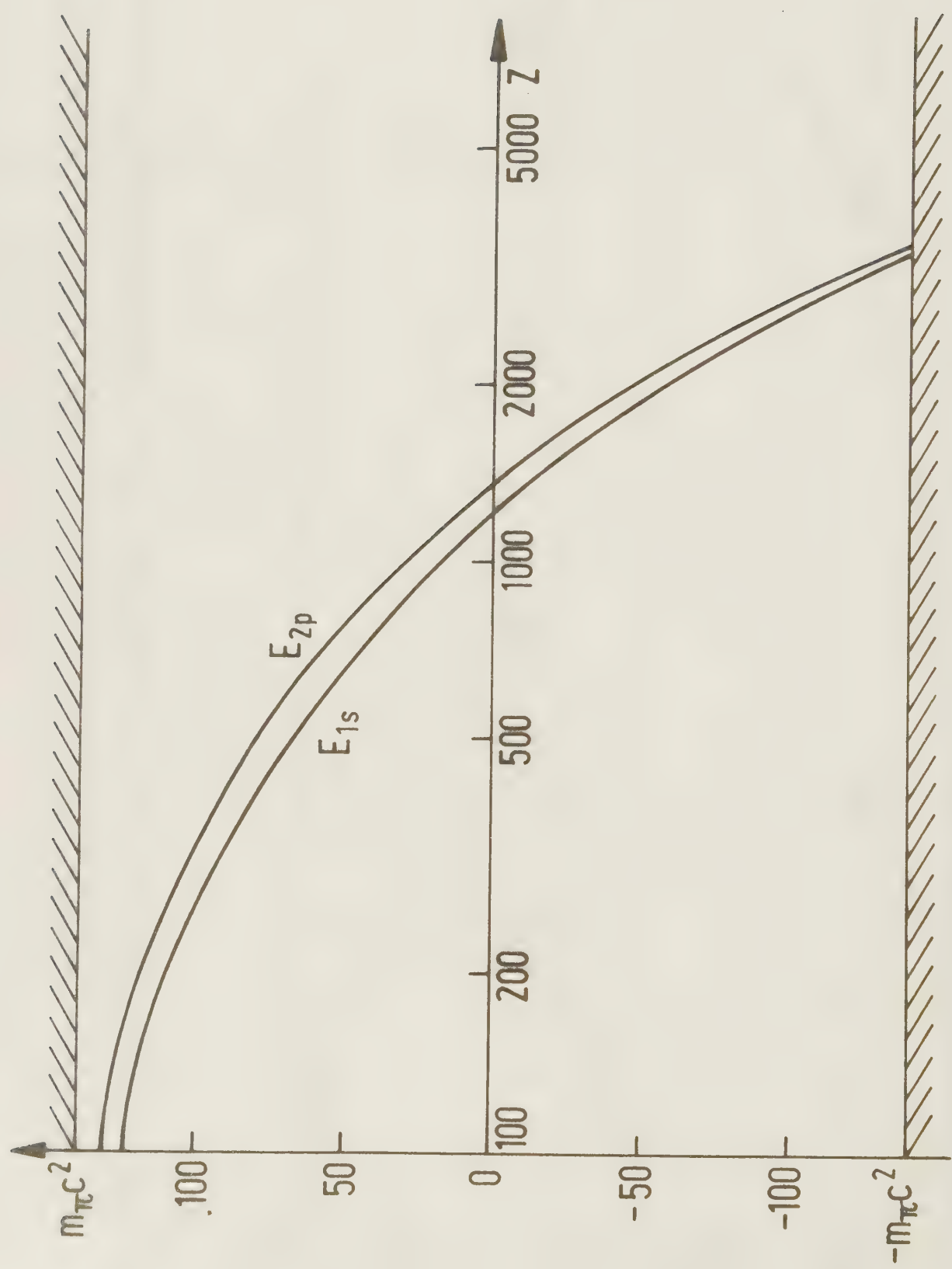


Fig.7

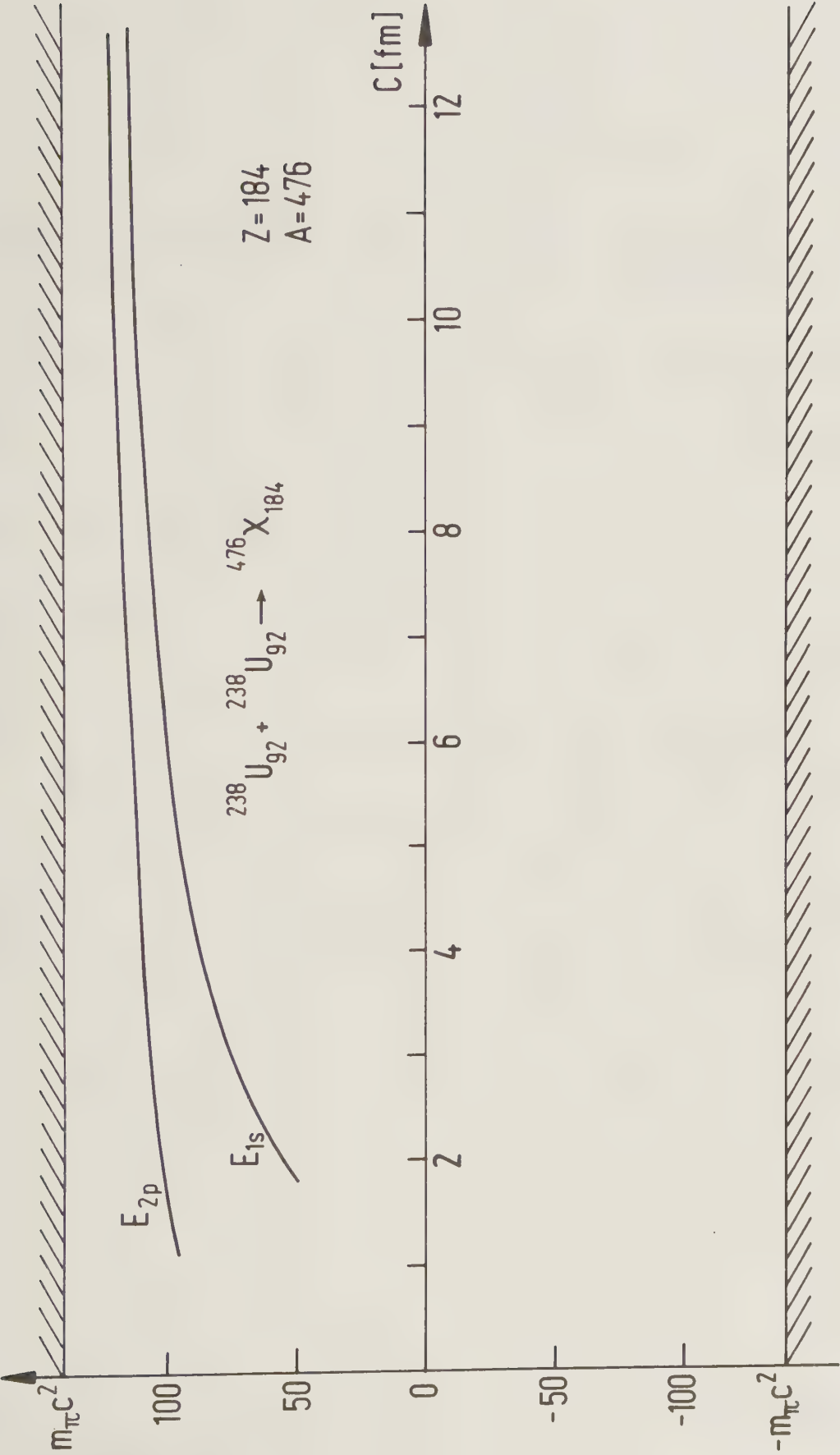


Fig.8

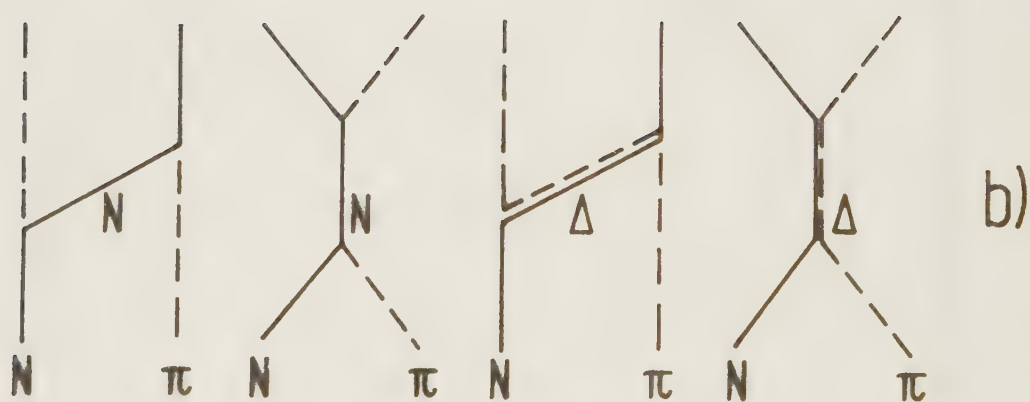
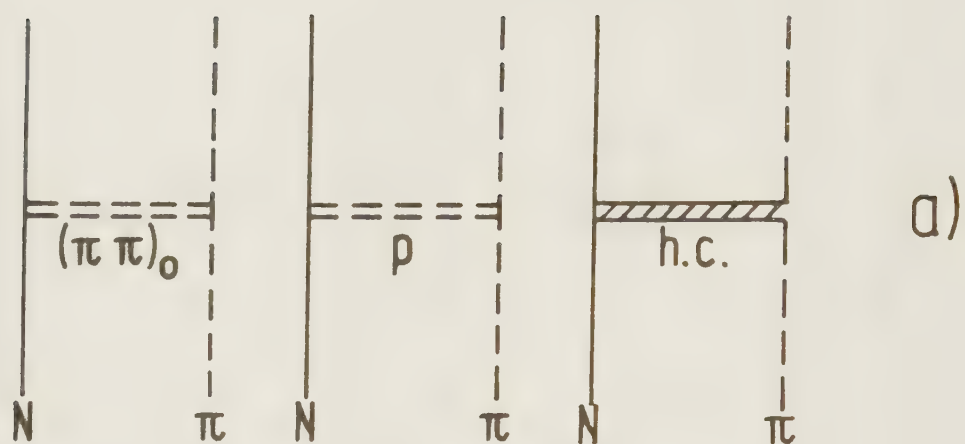


Fig. 9

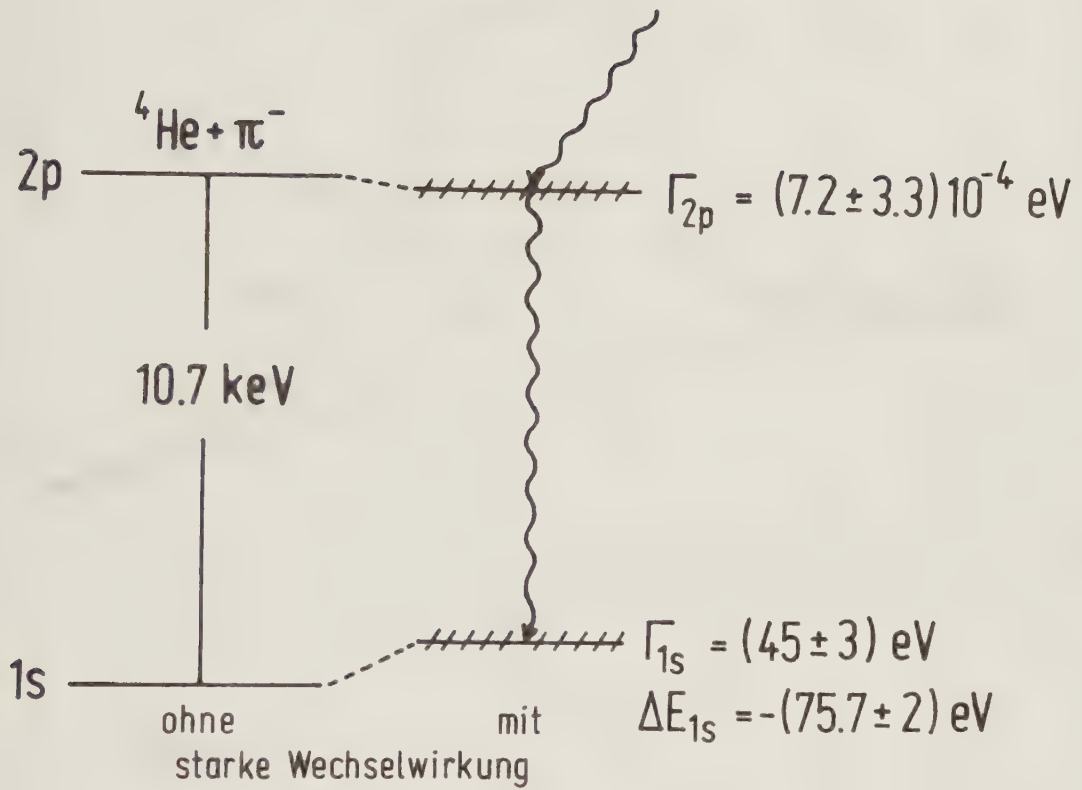


Fig.10

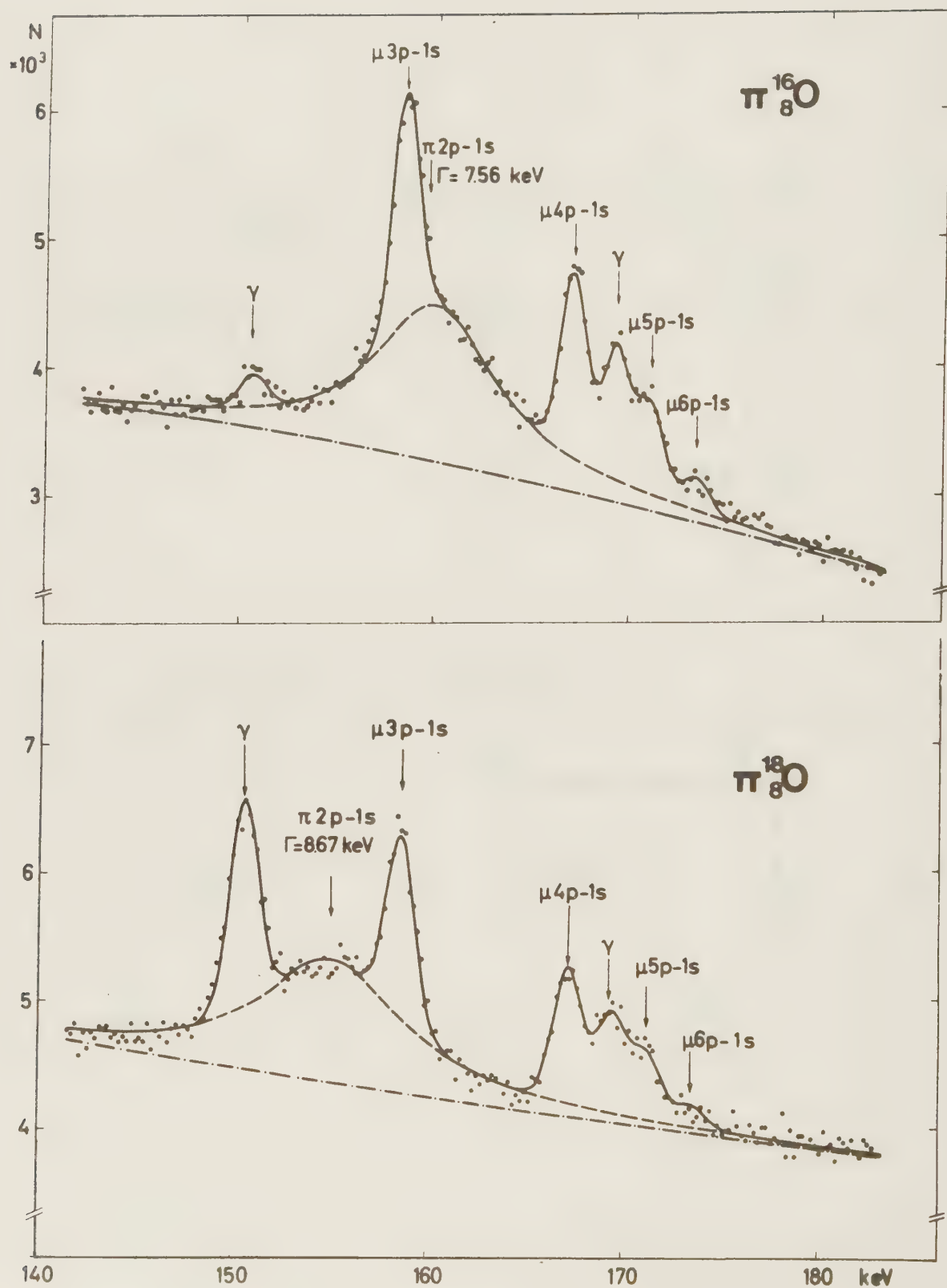


Fig.11

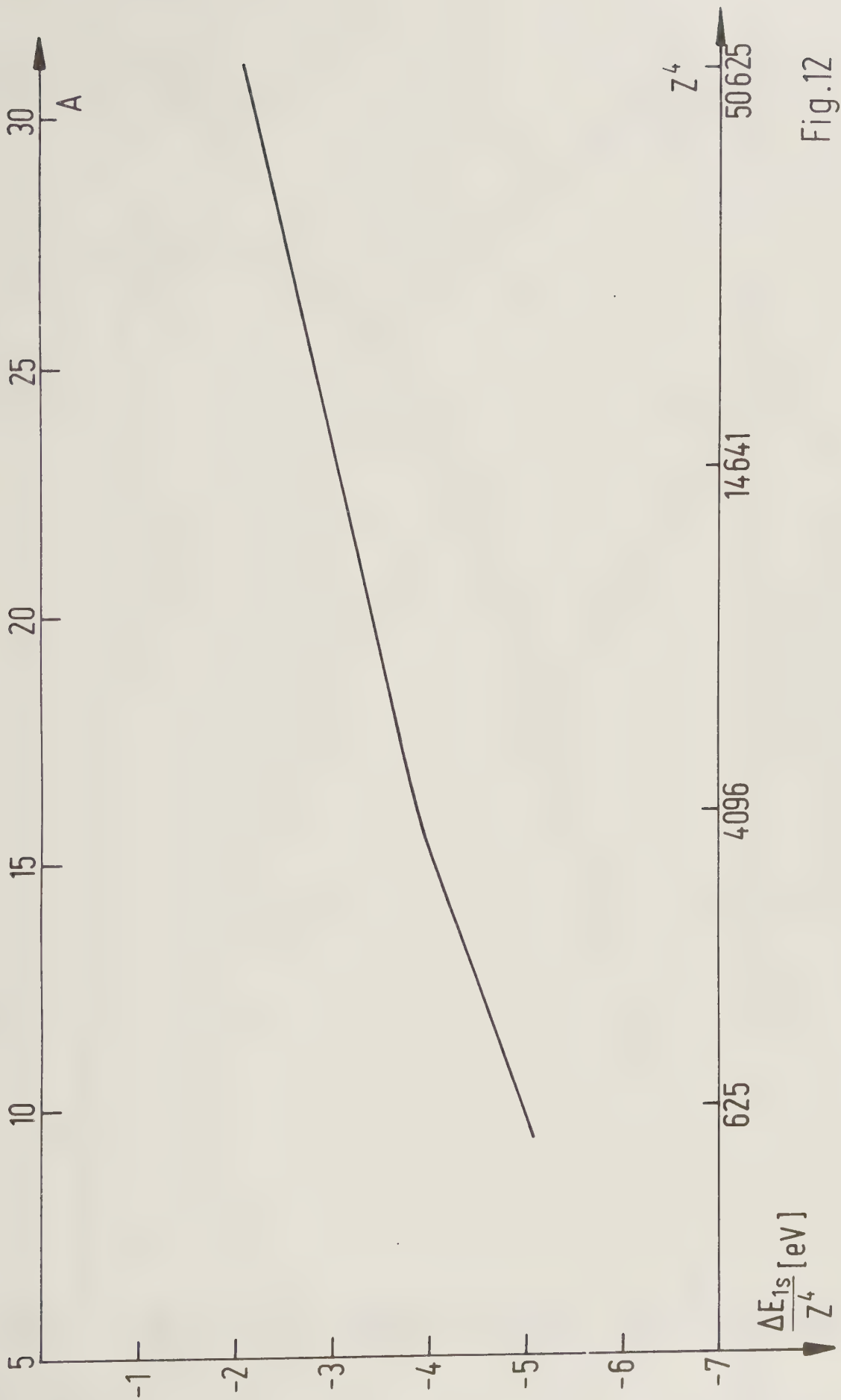


Fig.12

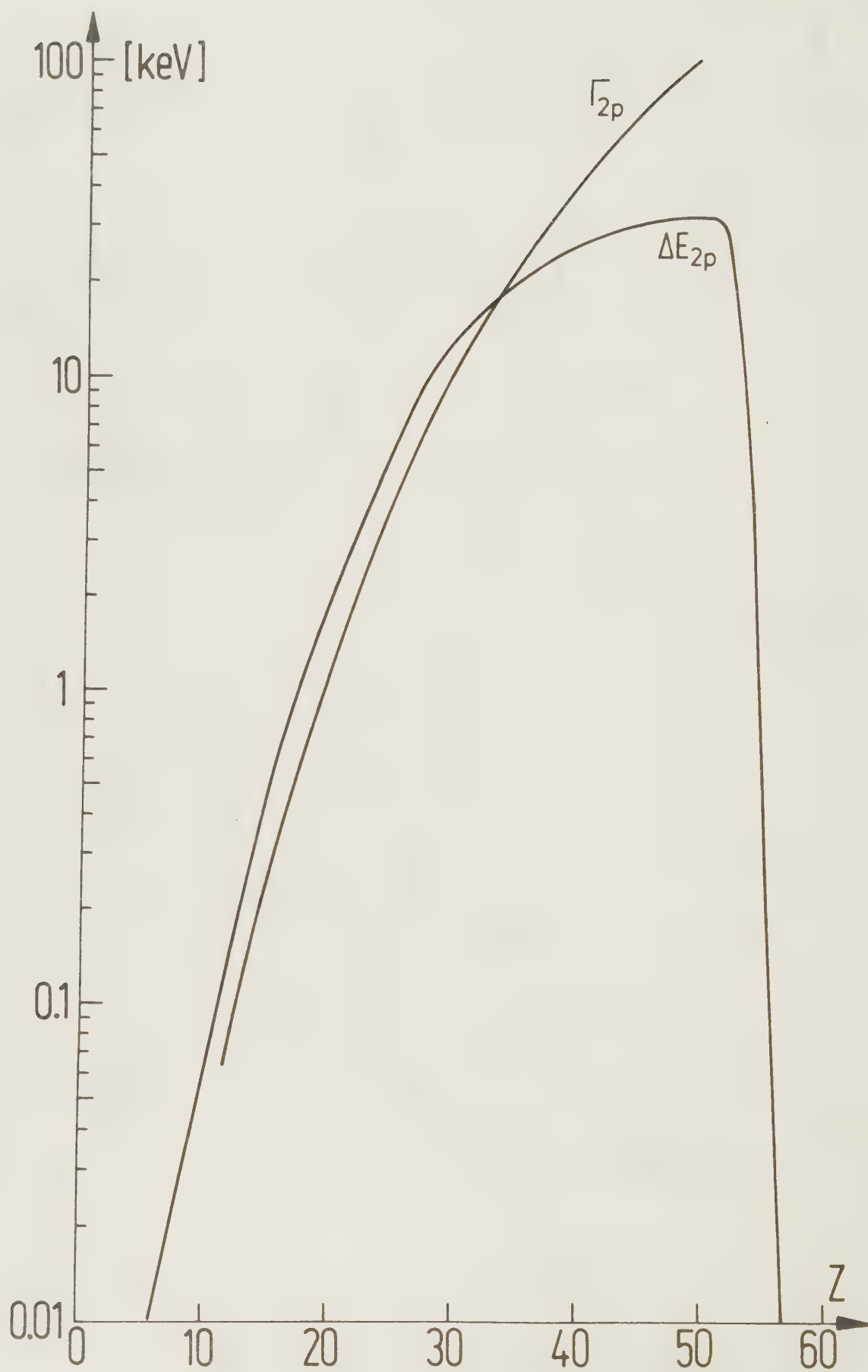


Fig.13

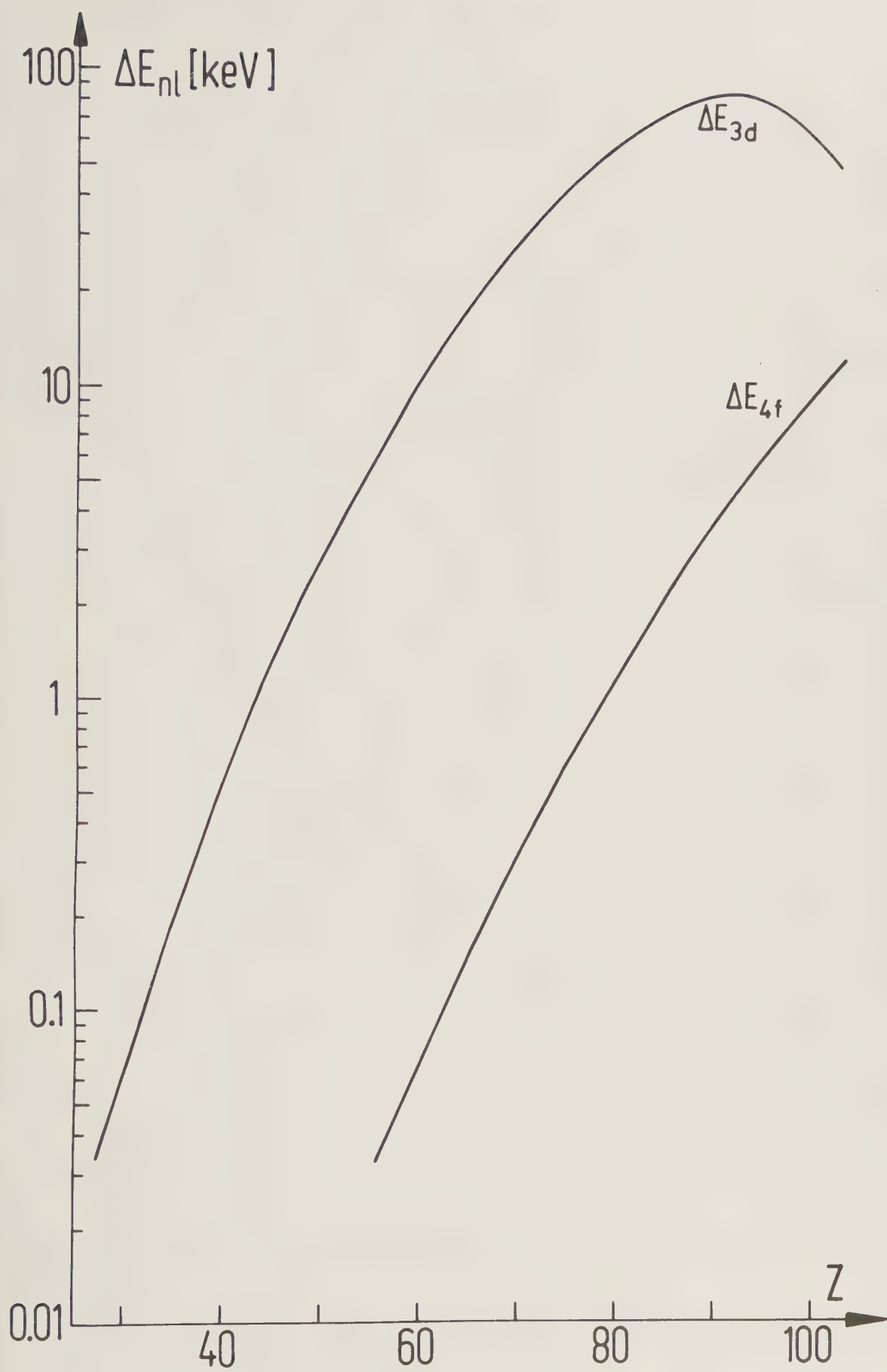


Fig.14

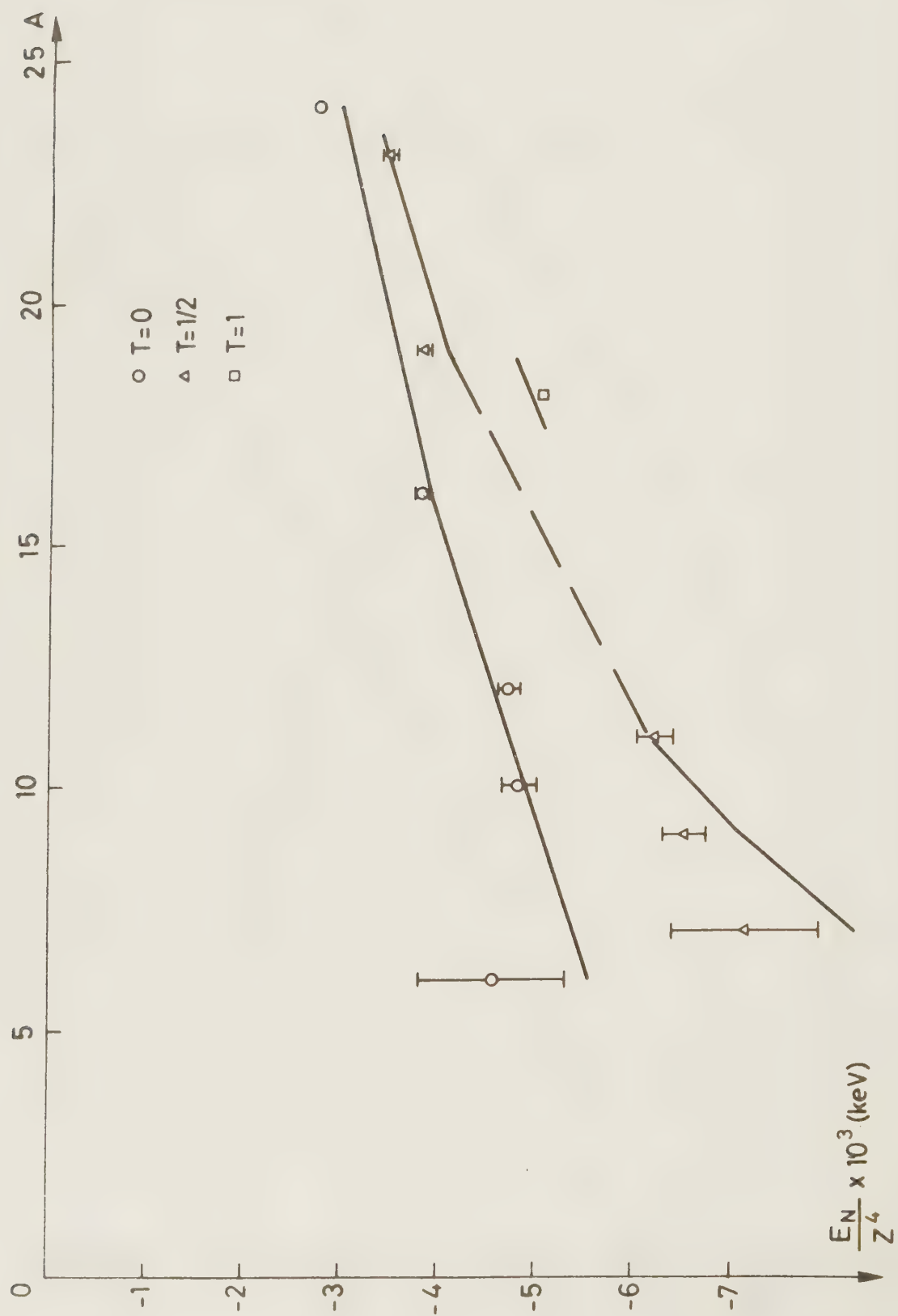


Fig.15

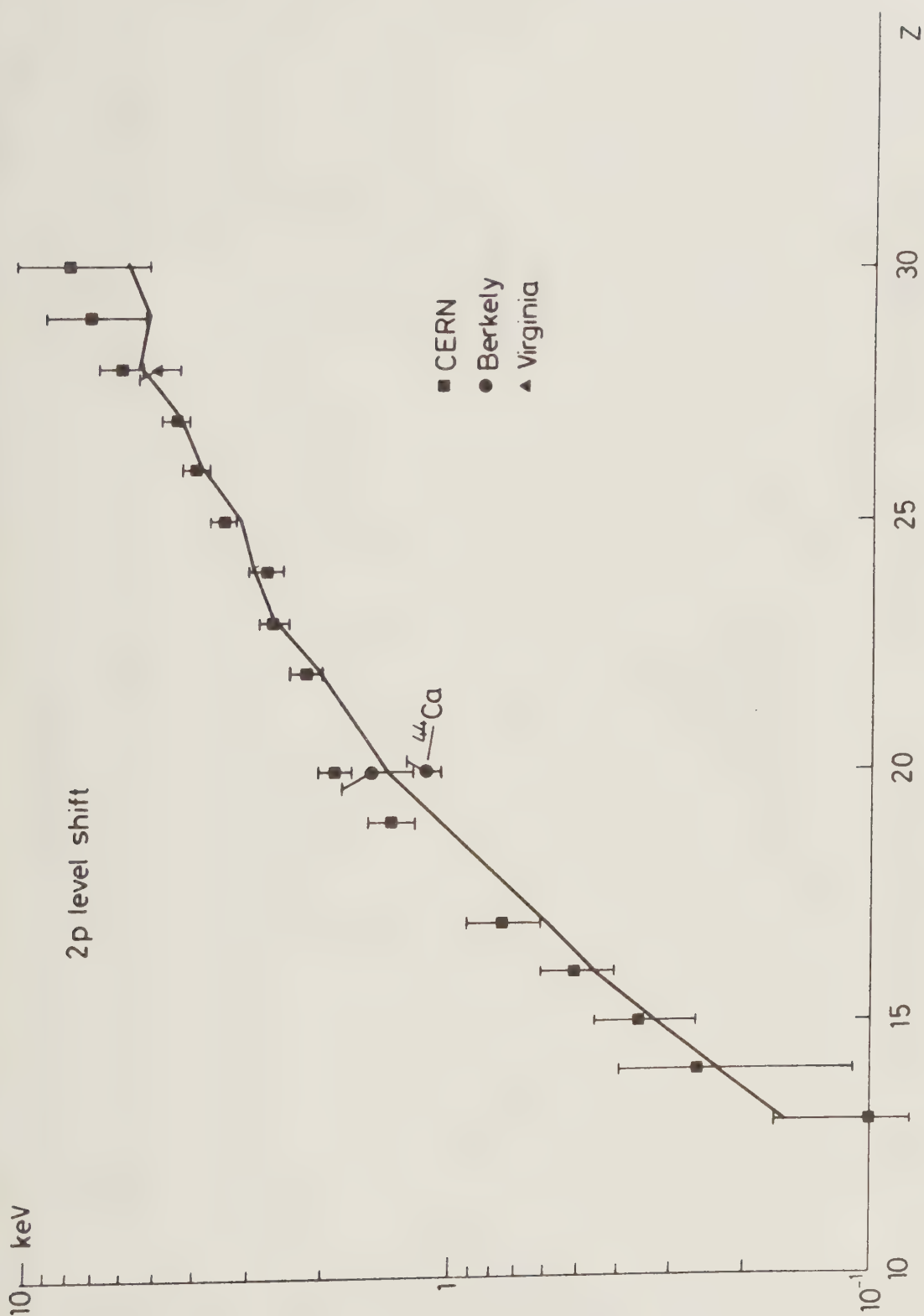


Fig.16

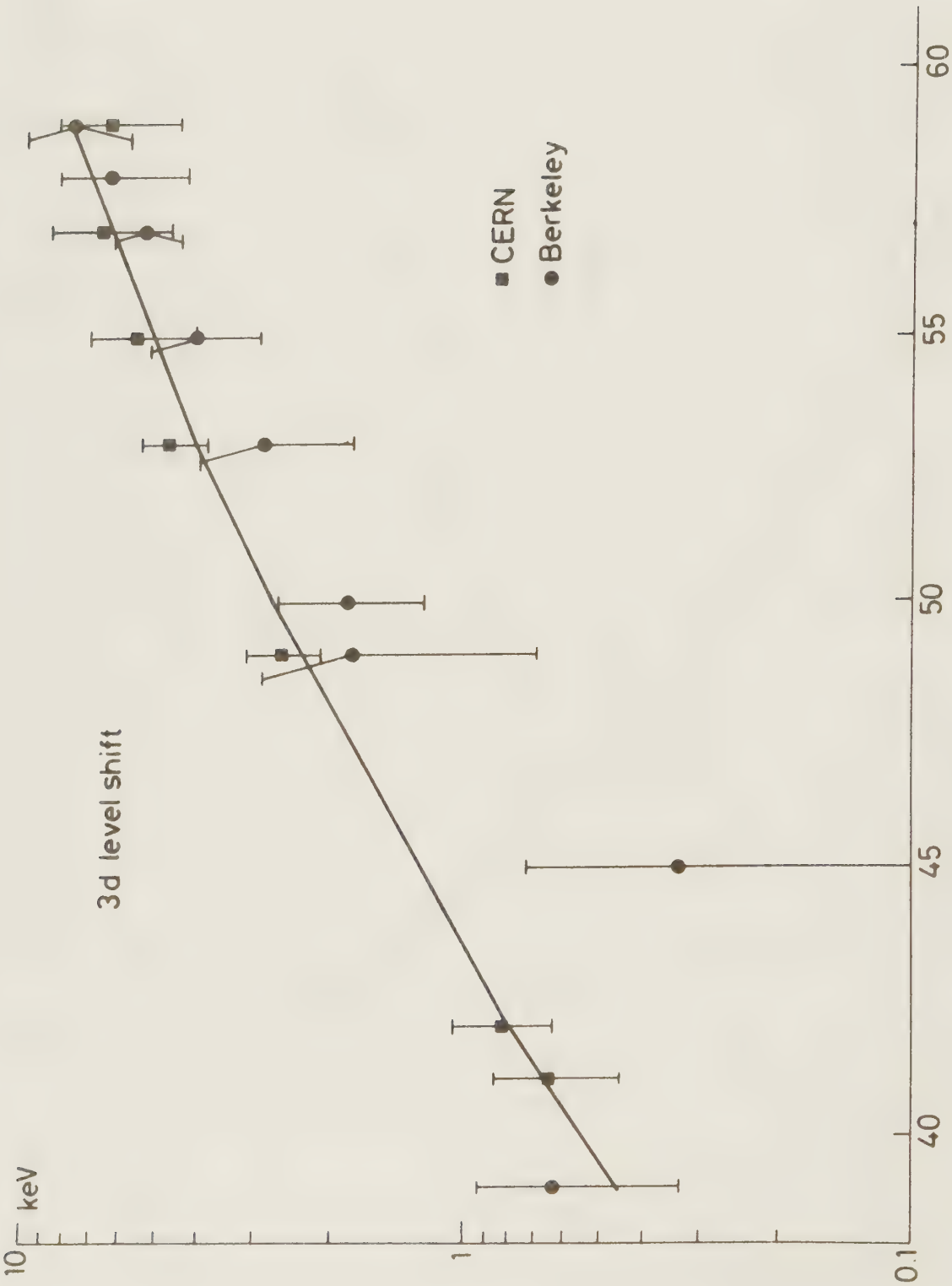


Fig.17

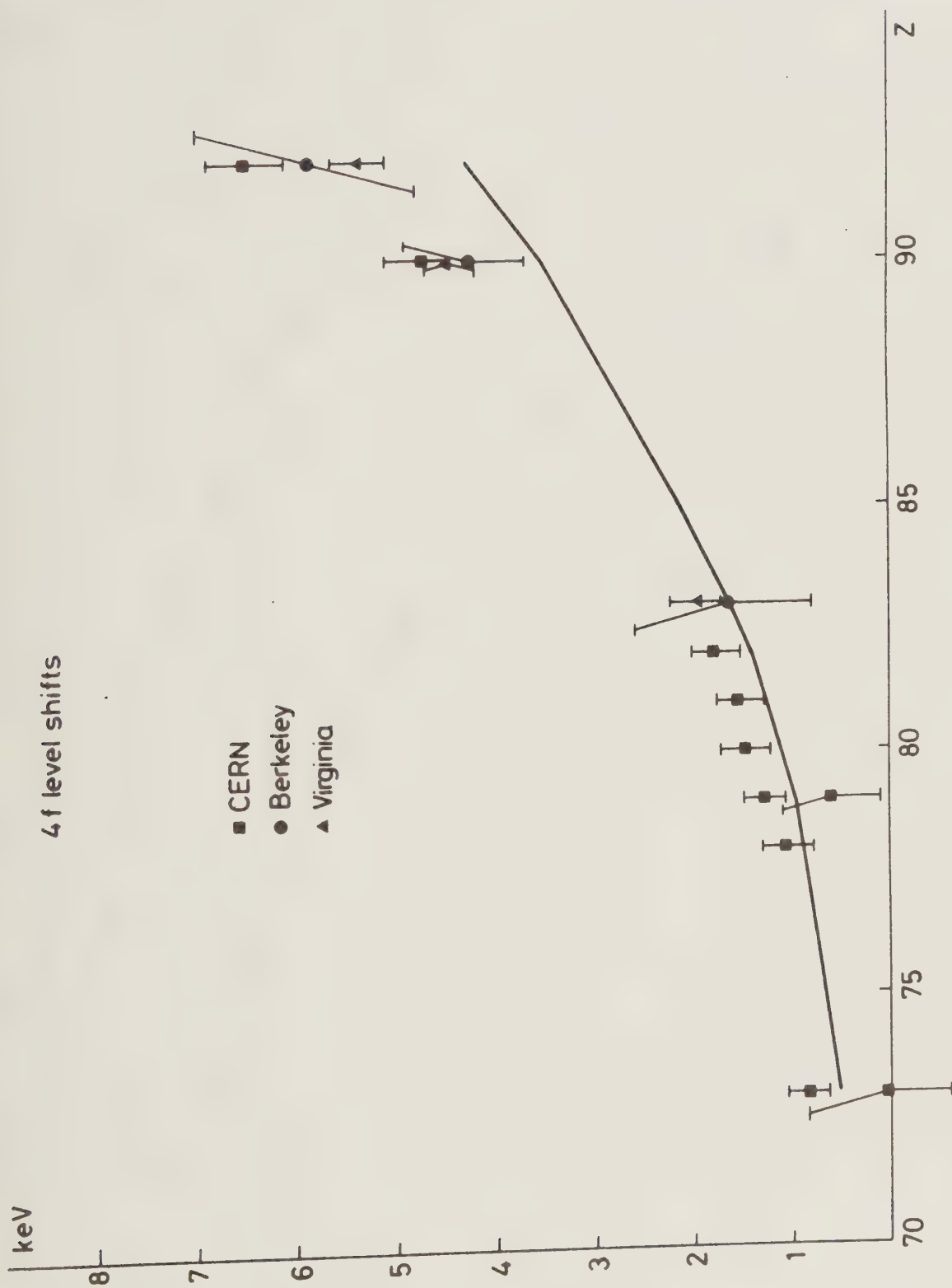


Fig.18

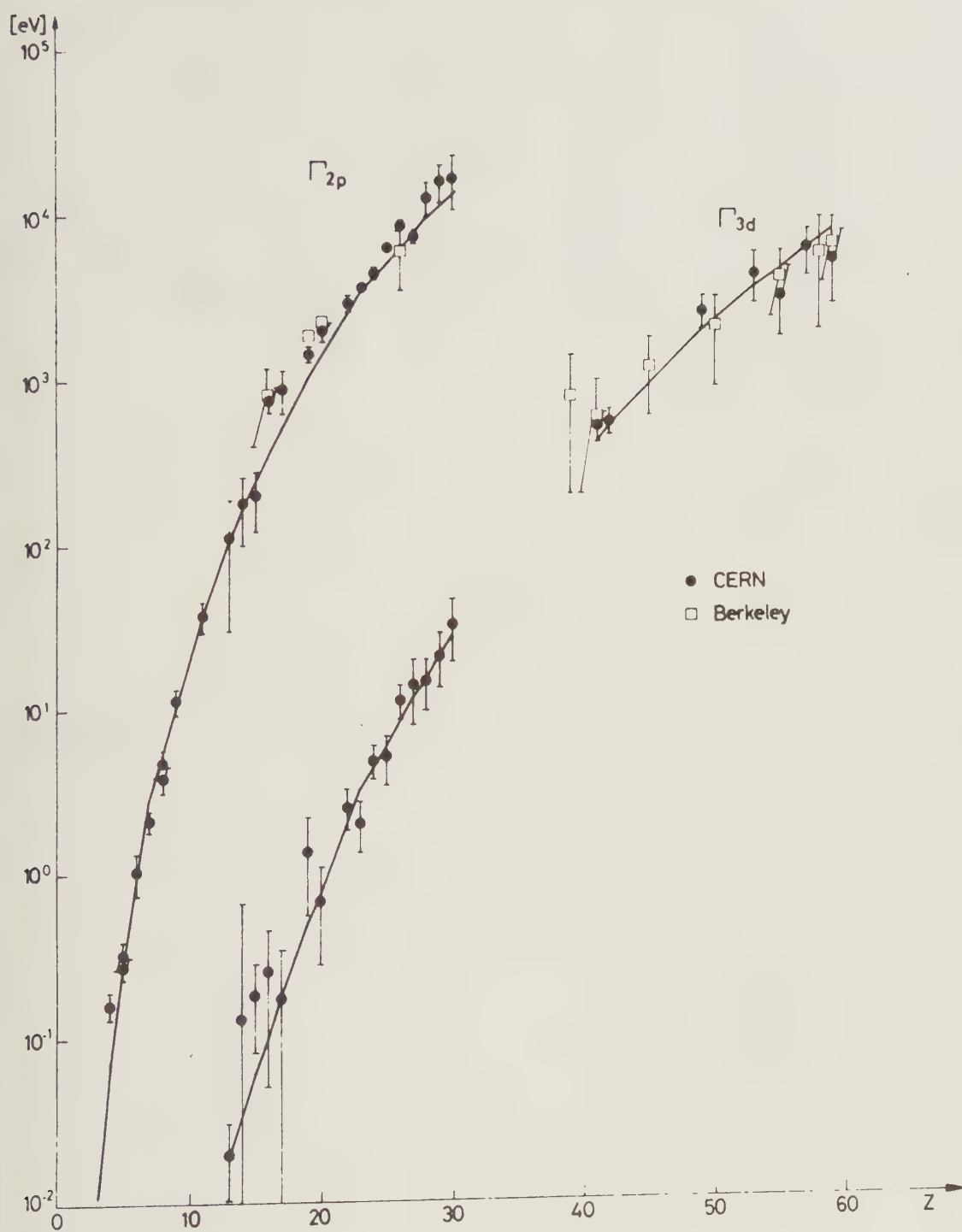


Fig.19

δ	$\Delta E_{1s} (10^5 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{1s}(\delta) - \Delta E_{1s}(0)}{\Delta E_{1s}(0)}$	$\Gamma_{1s} (10^5 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{1s}(\delta) - \Gamma_{1s}(0)}{\Gamma_{1s}(0)}$
0.00	-0.4786	0	0.1631	0
0.02	-0.4590	-4.10%	0.1928	18.21%
0.05	-0.4283	-10.51%	0.2428	48.87%
0.10	-0.3742	-21.81%	0.3229	97.98%
0.15	-0.3170	-33.77%	0.4691	187.62%
0.20	-0.2583	-46.03%	0.6282	285.16%
0.25	-0.2009	-58.02%	0.8284	407.91%
0.30	-0.1493	-68.81%	1.079	561.16%

Tabelle zur Fig.21

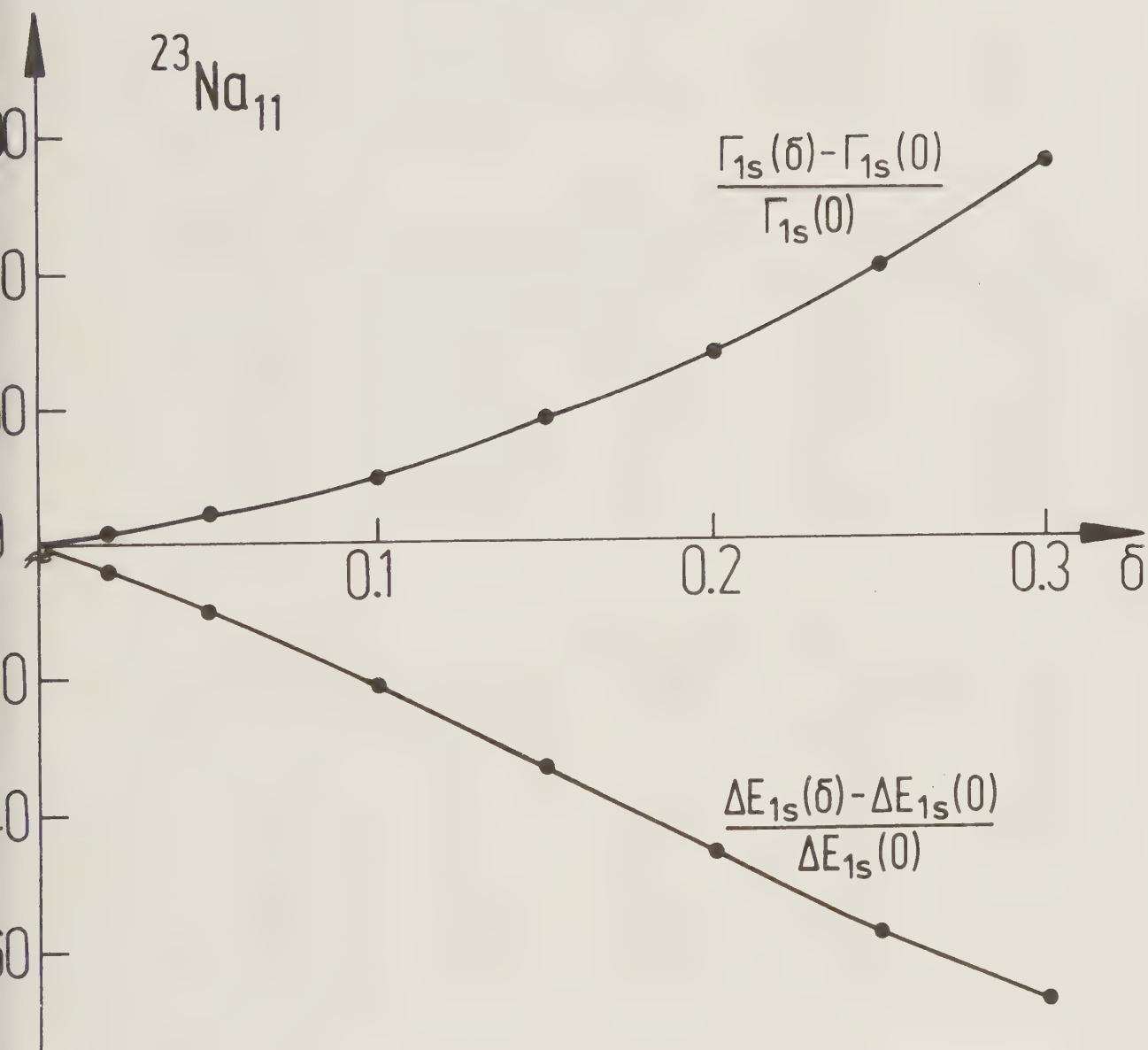


Fig.21

δ	$\Delta E_{2p} (10^2 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{2p}(\delta) - \Delta E_{2p}(0)}{\Delta E_{2p}(0)}$	$\Gamma_{2p} (10^2 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{2p}(\delta) - \Gamma_{2p}(0)}{\Gamma_{2p}(0)}$
0.00	0.7103	0	0.4760	0
0.02	0.7420	4.6%	0.5204	9.3%
0.02	0.7907	11.3%	0.5905	24.1%
0.10	0.8750	23.2%	0.7204	51.3%
0.15	0.9632	35.6%	0.8684	82.4%
0.20	1.0549	48.5%	1.037	117.9%
0.25	1.1496	61.8%	1.231	158.6%
0.30	1.2465	75.5%	1.450	204.6%

δ	$\Delta E_{3d} (10^1 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{3d}(\delta) - \Delta E_{3d}(0)}{\Delta E_{3d}(0)}$	$\Gamma_{3d} (10^2 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{3d}(\delta) - \Gamma_{3d}(0)}{\Gamma_{3d}(0)}$
0.00	0.1205	0	0.5706	0
0.02	0.1230	2.07%	0.6025	5.59%
0.05	0.1268	5.23%	0.6527	14.39%
0.10	0.1334	10.71%	0.7428	30.18%
0.20	0.1472	22.16%	0.9507	66.61%
0.30	0.1620	34.44%	1.202	110.66%

δ	$\Delta E_{4f} (10^6 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{4f}(\delta) - \Delta E_{4f}(0)}{\Delta E_{4f}(0)}$	$\Gamma_{4f} (10^6 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{4f}(\delta) - \Gamma_{4f}(0)}{\Gamma_{4f}(0)}$
0.00	0.3704	0	0.1508	0
0.02	0.3755	1.38%	0.1568	3.98%
0.05	0.3832	3.46%	0.1662	10.21%
0.10	0.3965	7.05%	0.1829	21.29%
0.20	0.4244	14.58%	0.2204	46.15%
0.30	0.4541	22.60%	0.2643	75.26%

Tabelle zur Fig.22

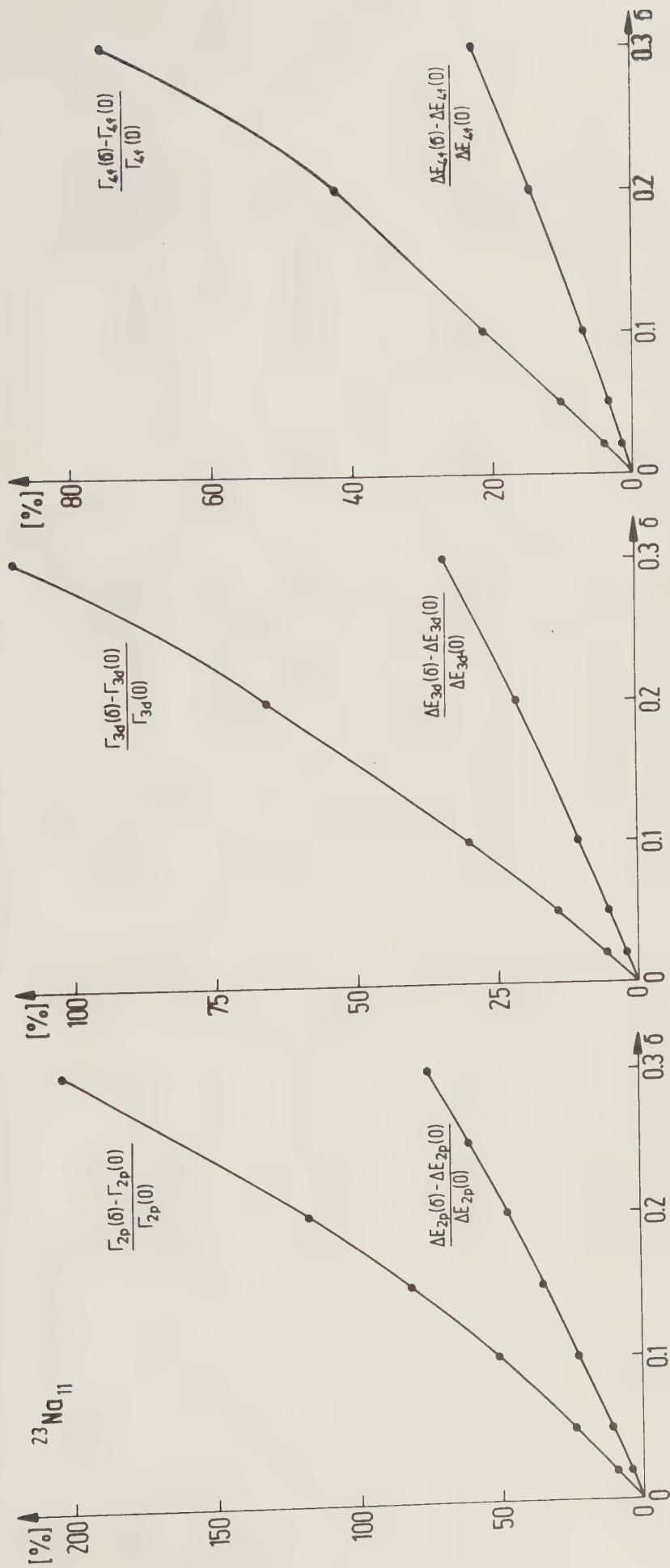


Fig. 22

δ	$\Delta E_{2p}(10^3 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{2p}(\delta) - \Delta E_{2p}(0)}{\Delta E_{2p}(0)}$	$\Gamma_{2p}(10^3 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{2p}(\delta) - \Gamma_{2p}(0)}{\Gamma_{2p}(0)}$
0.00	0.47818	0	0.2467	0
0.02	0.47954	0.28%	0.2550	3.36%
0.05	0.48186	0.77%	0.2641	7.05%
0.10	0.48671	1.78%	0.2831	14.75%
0.20	0.49722	3.98%	0.3238	31.25%
0.30	0.50853	6.35%	0.3686	49.41%

δ	$\Delta E_{3d}(\text{eV})$	$\frac{\Delta E_{3d}(\delta) - \Delta E_{3d}(0)}{\Delta E_{3d}(0)}$	$\Gamma_{3d}(10^4 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{3d}(\delta) - \Gamma_{3d}(0)}{\Gamma_{3d}(0)}$
0.00	0.1888	0	0.630	0
0.02	0.1890	0.106%	0.644	2.22%
0.05	0.1895	0.371%	0.659	4.60%
0.10	0.1904	0.848%	0.691	9.68%
0.20	0.1924	1.907%	0.758	20.32%
0.30	0.1945	3.019%	0.832	32.06%

δ	$\Delta E_{4f}(10^4 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{4f}(\delta) - \Delta E_{4f}(0)}{\Delta E_{4f}(0)}$	$\Gamma_{4f}(10^5 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{4f}(\delta) - \Gamma_{4f}(0)}{\Gamma_{4f}(0)}$
0.00	0.1464	0	0.3865	0
0.02	0.1465	0.07%	0.3911	1.19%
0.05	0.1467	0.20%	0.3988	3.18%
0.10	0.1471	0.48%	0.4121	6.62%
0.20	0.1480	1.09%	0.4411	14.13%
0.30	0.1489	1.70%	0.4731	22.41%

Tabelle zur Fig.23

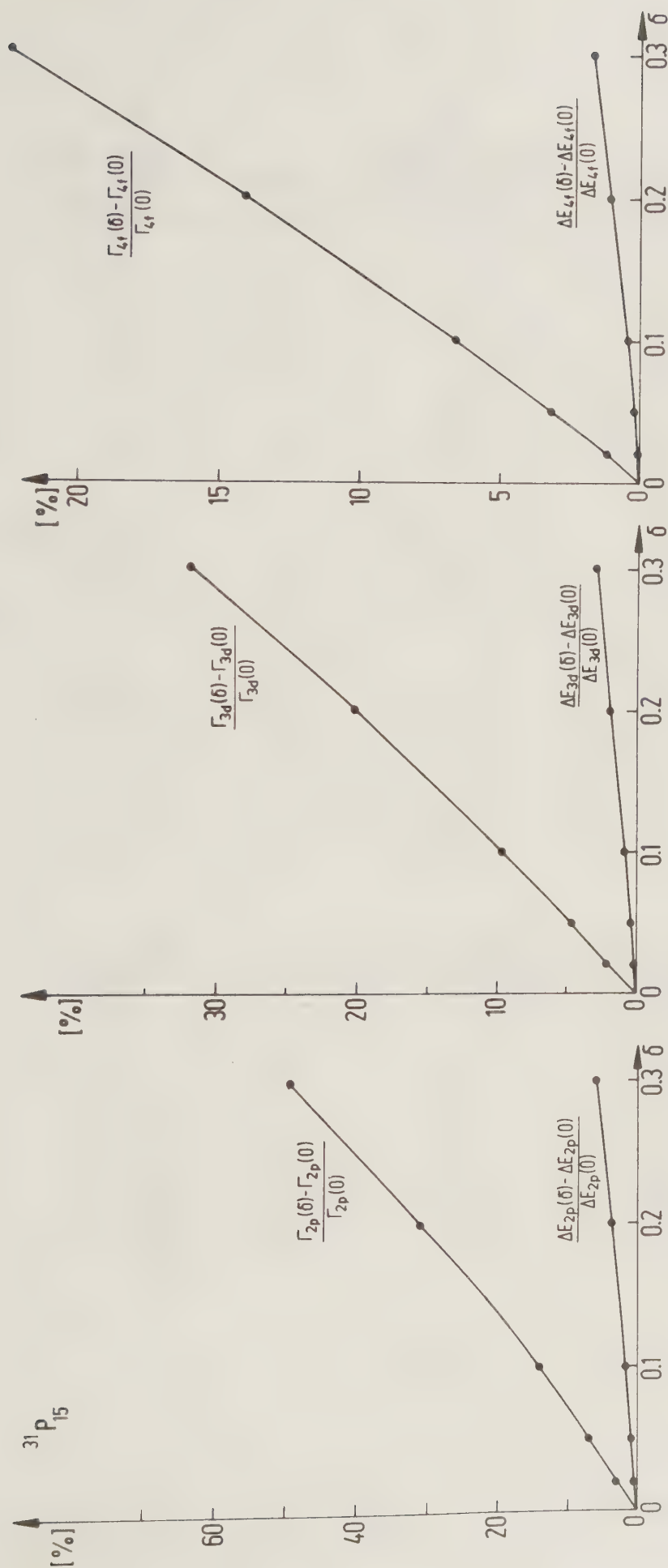


Fig. 23

δ	$\Delta E_{3p}(10^3 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{3p}(\delta) - \Delta E_{3p}(0)}{\Delta E_{3p}(0)}$	$\Gamma_{3p}(10^3 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{3p}(\delta) - \Gamma_{3p}(0)}{\Gamma_{3p}(0)}$
0.00	2.072	0	1.042	0
0.02	1.882	-9.17%	0.9454	-9.27%
0.05	1.704	-17.76%	0.8586	-17.60%
0.10	1.373	-33.74%	0.7046	-32.38%
0.20	0.7940	-61.68%	0.4594	-55.91%
0.30	0.3048	-85.29%	0.2760	-73.51%

δ	$\Delta E_{3d}(10 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{3d}(\delta) - \Delta E_{3d}(0)}{\Delta E_{3d}(0)}$	$\Gamma_{3d}(\text{eV})$	$\frac{\Gamma_{3d}(\delta) - \Gamma_{3d}(0)}{\Gamma_{3d}(0)}$
0.00	0.2089	0	0.637	0
0.02	0.2023	-3.18%	0.607	-4.64%
0.05	0.1929	-7.66%	0.567	-10.99%
0.10	0.1781	-14.74%	0.505	-20.72%
0.20	0.1509	-27.77%	0.396	-37.83%
0.30	0.1264	-39.49%	0.304	-52.28%

δ	$\Delta E_{4f}(10^3 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{4f}(\delta) - \Delta E_{4f}(0)}{\Delta E_{4f}(0)}$	$\Gamma_{4f}(10^4 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{4f}(\delta) - \Gamma_{4f}(0)}{\Gamma_{4f}(0)}$
0.00	0.3783	0	0.8866	0
0.02	0.3711	-1.90%	0.8578	-3.25%
0.05	0.3612	-4.52%	0.8179	-7.75%
0.10	0.3451	-8.78%	0.7550	-14.84%
0.20	0.3150	-16.73%	0.6410	-27.70%
0.30	0.2873	-24.05%	0.5409	-38.99%

Tabelle zur Fig. 24

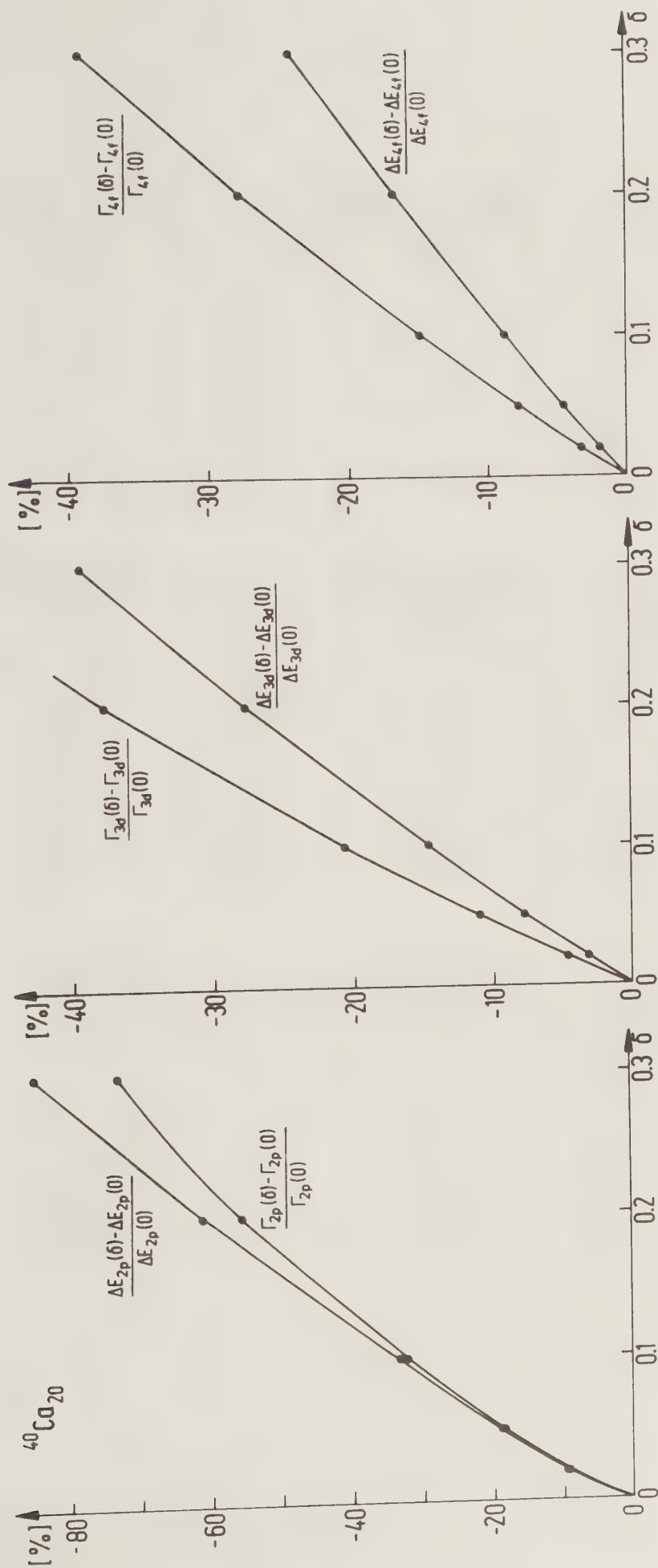


Fig. 24

δ	$\Delta E_{2p} (10^4 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{2p}(\delta) - \Delta E_{2p}(0)}{\Delta E_{2p}(0)}$	$\Gamma_{2p} (10^4 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{2p}(\delta) - \Gamma_{2p}(0)}{\Gamma_{2p}(0)}$
0.00	1.0660	0	0.8185	0
0.02	0.9853	-7.57%	0.7454	-8.93%
0.05	0.8707	-18.32%	0.6495	-20.65%
0.10	0.6940	-45.90%	0.5118	-37.47%
0.20	0.3866	-63.73%	0.3001	-63.34%
0.30	0.1295	-87.85%	0.1499	-81.69%

δ	$\Delta E_{3d} (10^2 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{3d}(\delta) - \Delta E_{3d}(0)}{\Delta E_{3d}(0)}$	$\Gamma_{3d} (10^2 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{3d}(\delta) - \Gamma_{3d}(0)}{\Gamma_{3d}(0)}$
0.00	0.3498	0	0.1364	0
0.02	0.3393	-3.0%	0.1286	-5.72%
0.05	0.3246	-7.2%	0.1181	-13.42%
0.10	0.3014	-13.84%	0.1021	-25.15%
0.20	0.2589	-25.99%	0.07495	-45.05%
0.30	0.2209	-36.85%	0.05308	-60.56%

δ	$\Delta E_{4f} (10^2 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{4f}(\delta) - \Delta E_{4f}(0)}{\Delta E_{4f}(0)}$	$\Gamma_{4f} (10^2 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{4f}(\delta) - \Gamma_{4f}(0)}{\Gamma_{4f}(0)}$
0.00	0.1600	0	0.4879	0
0.02	0.1570	-1.87%	0.4674	-4.20%
0.05	0.1529	-4.44%	0.4400	-9.82%
0.10	0.1464	-8.50%	0.3975	-18.53%
0.20	0.1342	-16.12%	0.3230	-33.80%
0.30	0.1231	-23.06%	0.2601	-46.69%

Tabelle zur Fig.25

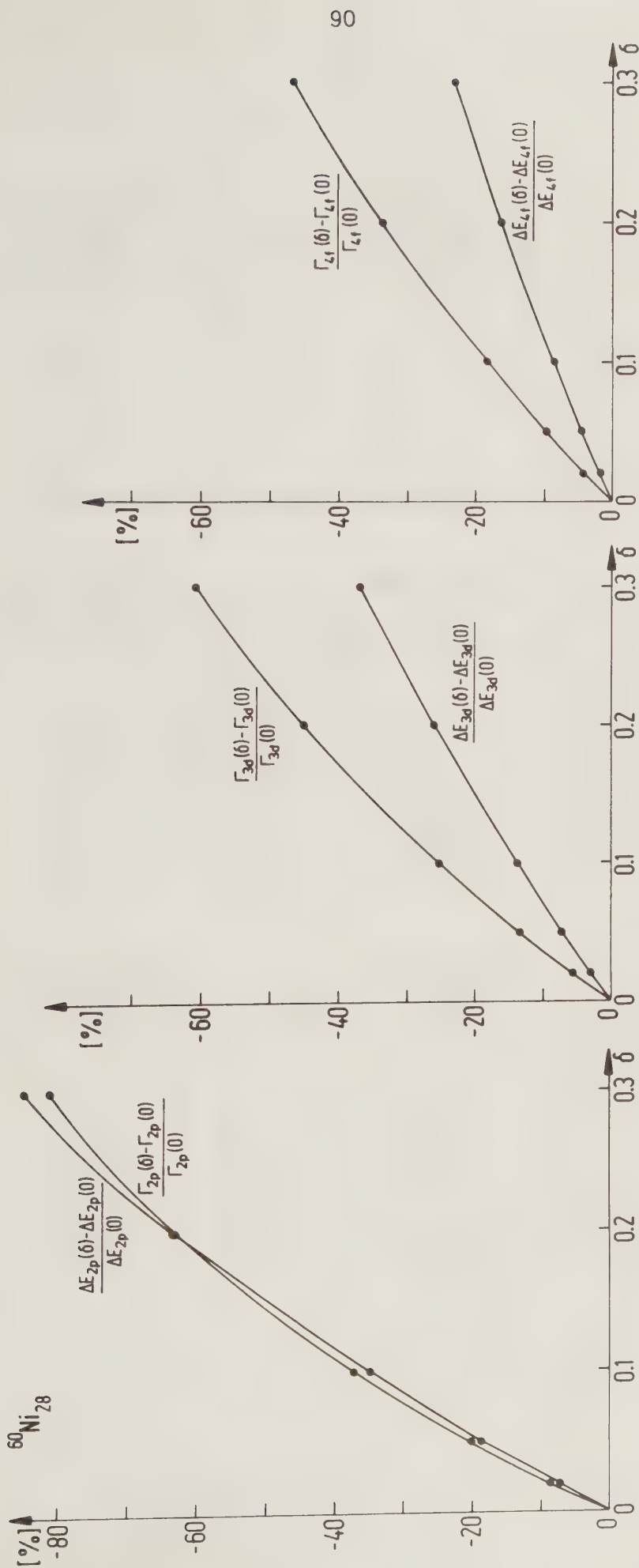


Fig.25

δ	$\Delta E_{2p} (10^6 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{2p}(\delta) - \Delta E_{2p}(0)}{\Delta E_{2p}(0)}$	$\Gamma_{2p} (10^6 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{2p}(\delta) - \Gamma_{2p}(0)}{\Gamma_{2p}(0)}$
0.00	0.2592	0	0.3628	0
0.02	0.2935	13.23%	0.3862	6.45%
0.05	0.3477	34.14%	0.4283	18.05%
0.10	0.4458	71.99%	0.5090	40.30%
0.20	0.6771	161.22%	0.7231	99.31%
0.30	0.9688	273.77%	1.041	186.93%

δ	$\Delta E_{3d} (10^3 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{3d}(\delta) - \Delta E_{3d}(0)}{\Delta E_{3d}(0)}$	$\Gamma_{3d} (10^3 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{3d}(\delta) - \Gamma_{3d}(0)}{\Gamma_{3d}(0)}$
0.00	0.4189	0	0.1968	0
0.02	0.4326	3.27%	0.2043	3.81%
0.05	0.4551	8.64%	0.2180	10.77%
0.10	0.4945	18.05%	0.2425	23.22%
0.20	0.5807	38.62%	0.2997	52.29%
0.30	0.6786	62.00%	0.3704	88.21%

δ	$\Delta E_{4f} (\text{eV})$	$\frac{\Delta E_{4f}(\delta) - \Delta E_{4f}(0)}{\Delta E_{4f}(0)}$	$\Gamma_{4f} (\text{eV})$	$\frac{\Gamma_{4f}(\delta) - \Gamma_{4f}(0)}{\Gamma_{4f}(0)}$
0.00	0.5130	0	0.1799	0
0.02	0.5223	1.81%	0.1845	2.56%
0.05	0.5385	4.97%	0.1931	7.34%
0.10	0.5664	10.41%	0.2082	15.73%
0.20	0.6257	21.97%	0.2417	34.35%
0.30	0.6904	34.58%	0.2800	55.64%

Tabelle zur Fig.26

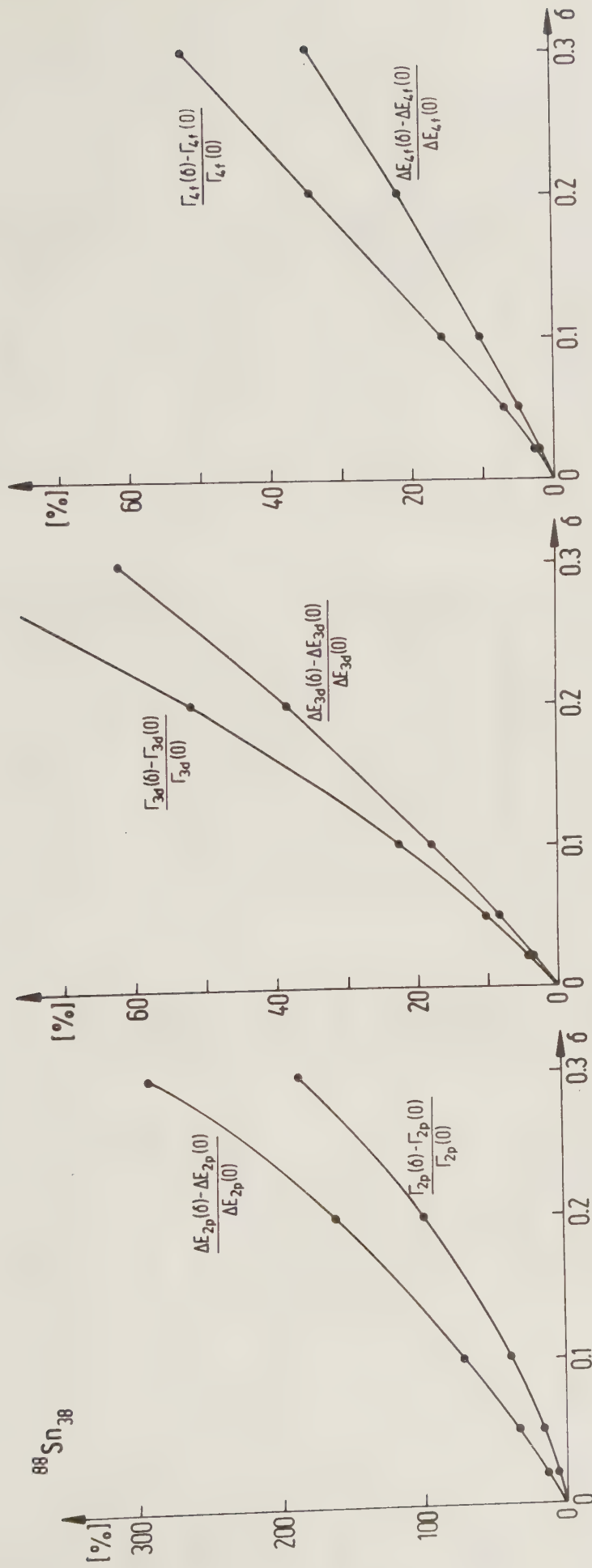


Fig. 26

δ	$\Delta E_{2p} (10^5 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{2p}(\delta) - \Delta E_{2p}(0)}{\Delta E_{2p}(0)}$	$\Gamma_{2p} (10^5 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{2p}(\delta) - \Gamma_{2p}(0)}{\Gamma_{2p}(0)}$
0.00	0.3062	0	0.9974	0
0.02	0.4155	35.7%	1.0900	9.3%
0.05	0.5883	92.1%	1.265	26.8%
0.10	0.9075	196.4%	1.618	62.2%
0.20	1.6861	450.7%	2.650	165.7%
0.30	2.7000	781.8%		

δ	$\Delta E_{3d} (10^4 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{3d}(\delta) - \Delta E_{3d}(0)}{\Delta E_{3d}(0)}$	$\Gamma_{3d} (10^4 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{3d}(\delta) - \Gamma_{3d}(0)}{\Gamma_{3d}(0)}$
0.00	0.2809	0	0.1571	0
0.02	0.2937	4.56%	0.1670	6.30%
0.05	0.3152	12.21%	0.1855	18.08%
0.10	0.3536	25.88%	0.2208	40.55%
0.20	0.4412	57.07%	0.3128	99.11%
0.30	0.5461	94.41%	0.4462	184.03%

δ	$\Delta E_{4f} (10^0 \text{ eV})$	$\frac{\Delta E_{4f}(\delta) - \Delta E_{4f}(0)}{\Delta E_{4f}(0)}$	$\Gamma_{4f} (10^0 \text{ eV})$	$\frac{\Gamma_{4f}(\delta) - \Gamma_{4f}(0)}{\Gamma_{4f}(0)}$
0.00	0.7655	0	0.3003	0
0.02	0.7834	2.35%	0.3128	4.16%
0.05	0.8163	6.65%	0.3370	12.22%
0.10	0.8738	14.16%	0.3811	26.91%
0.20	0.9997	30.61%	0.4864	61.97%
0.30	1.1424	49.26%	0.6206	106.66%

Tabelle zur Fig.27

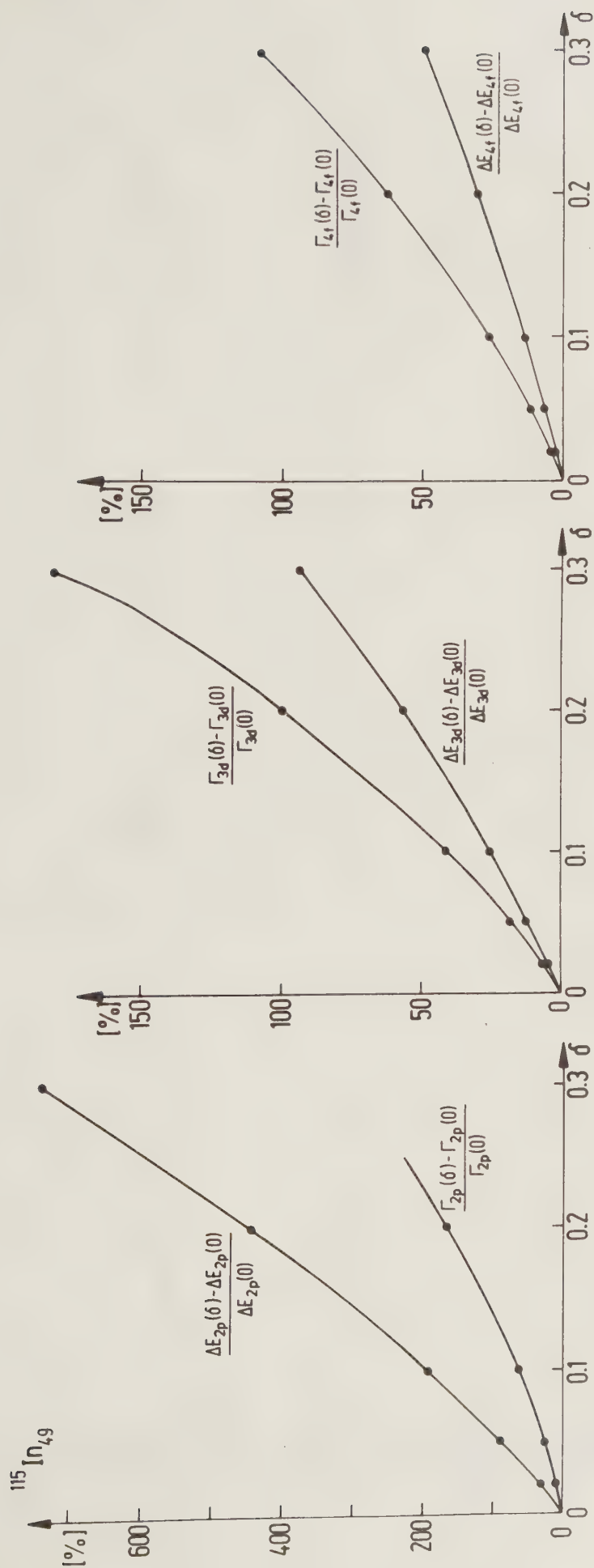


Fig. 27

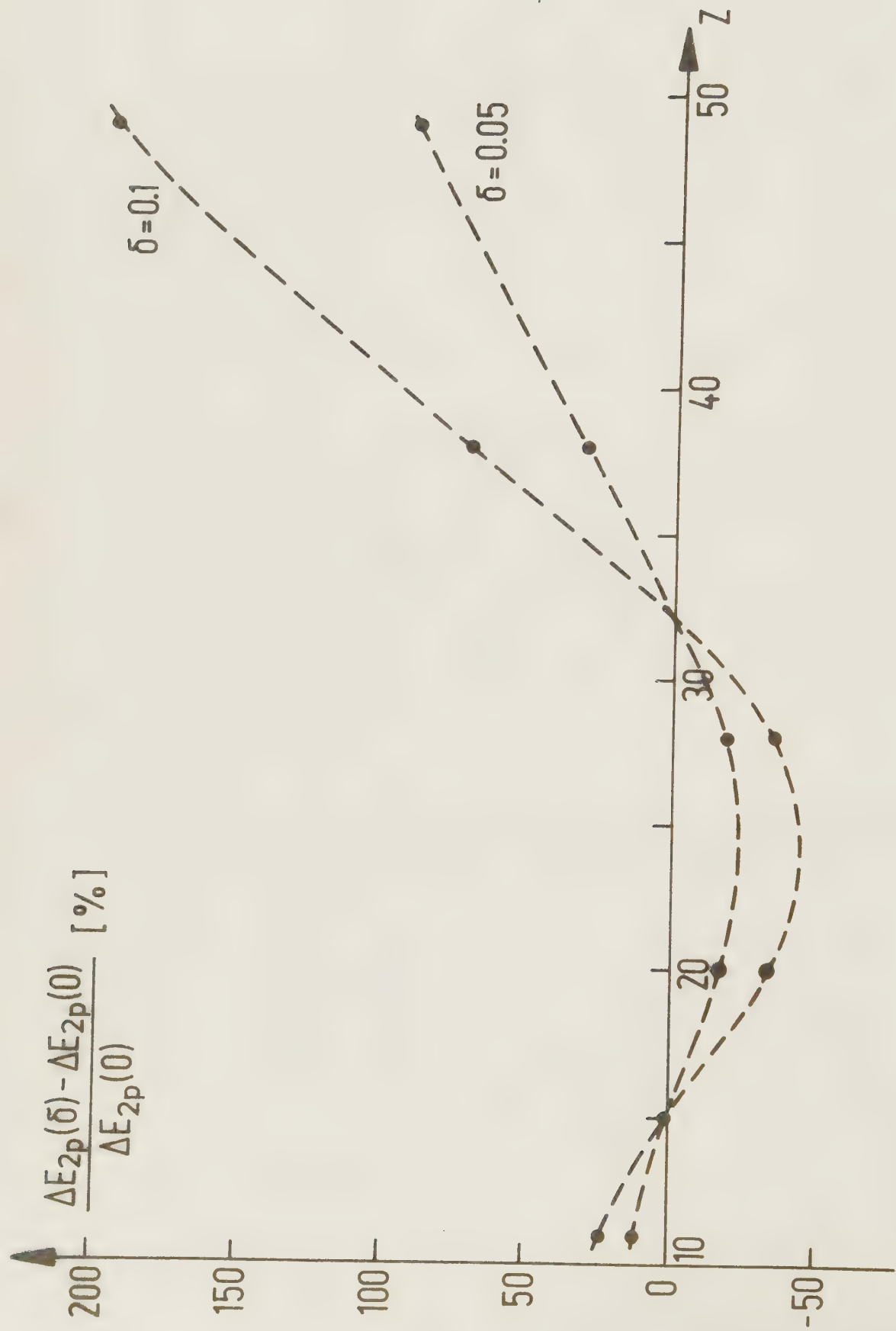


Fig. 28

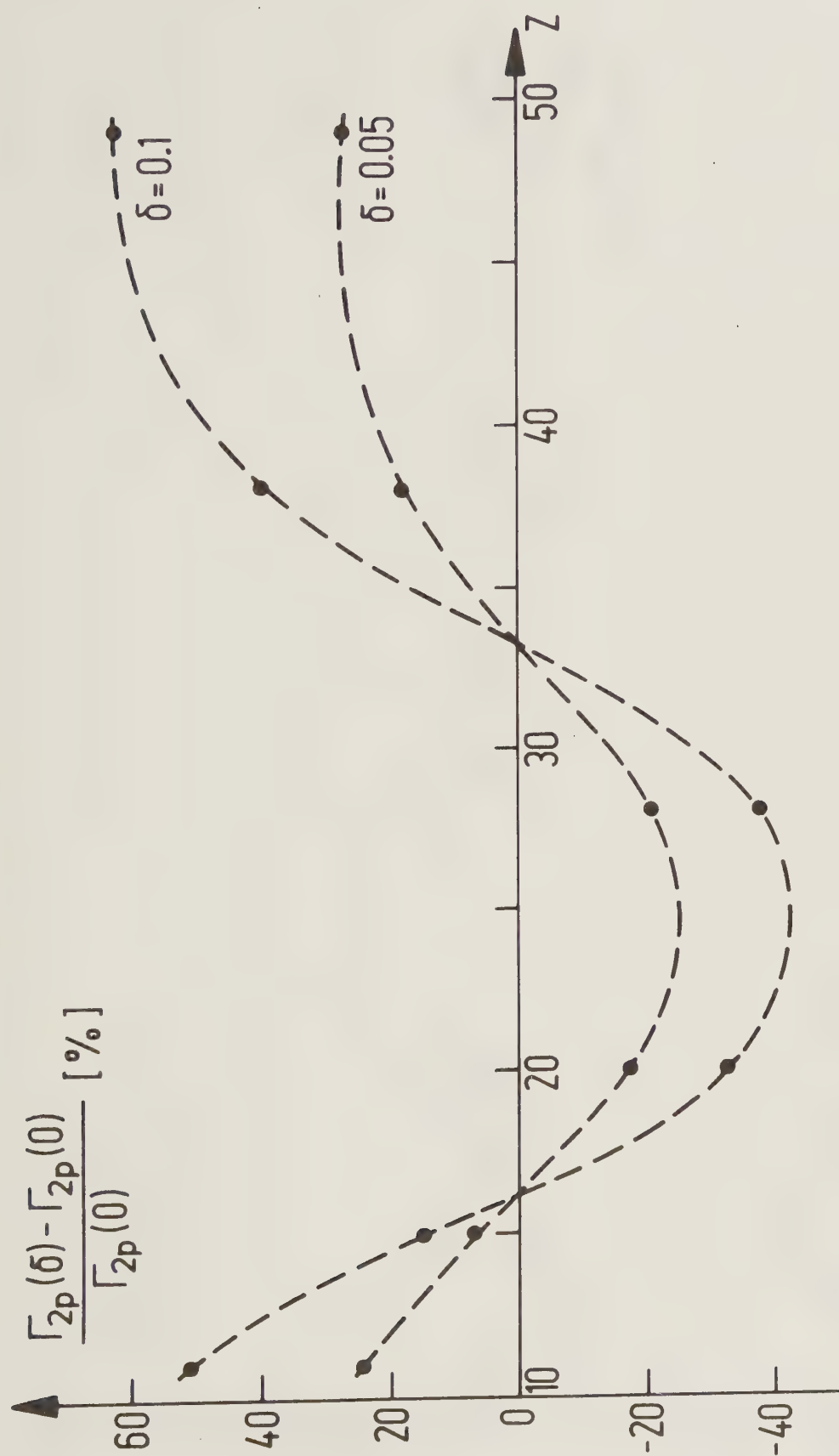


Fig. 29

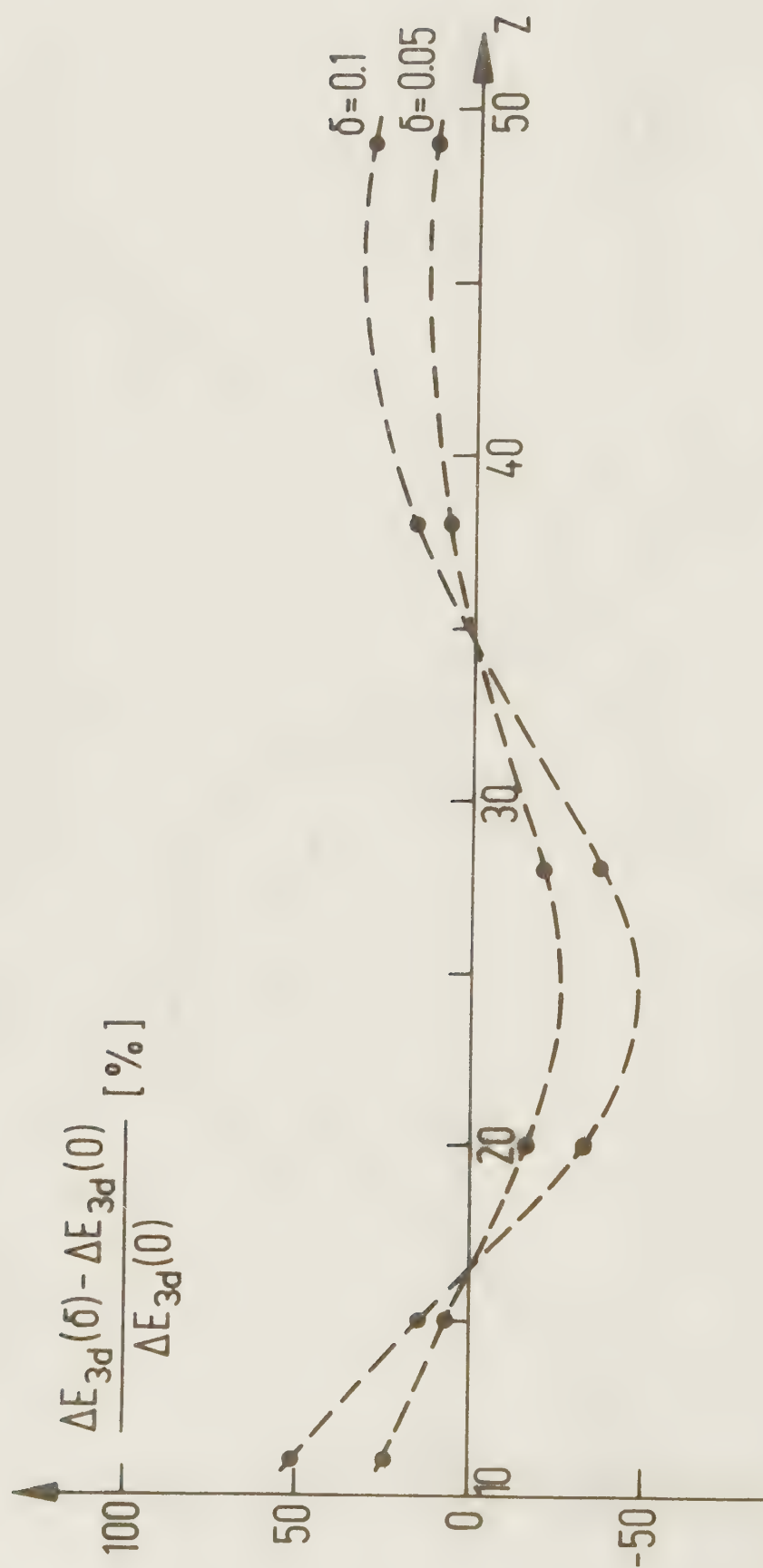


Fig.30

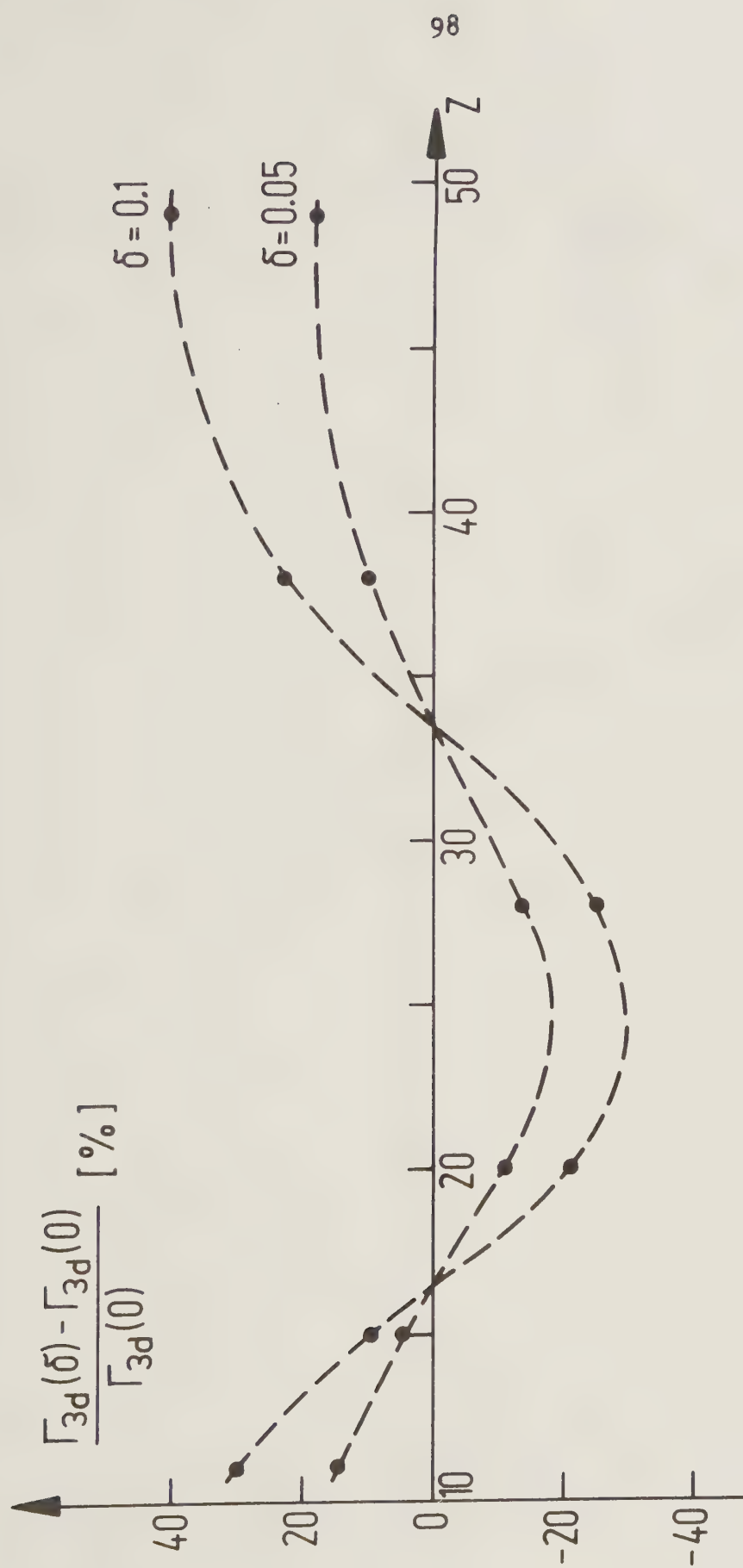


Fig. 31

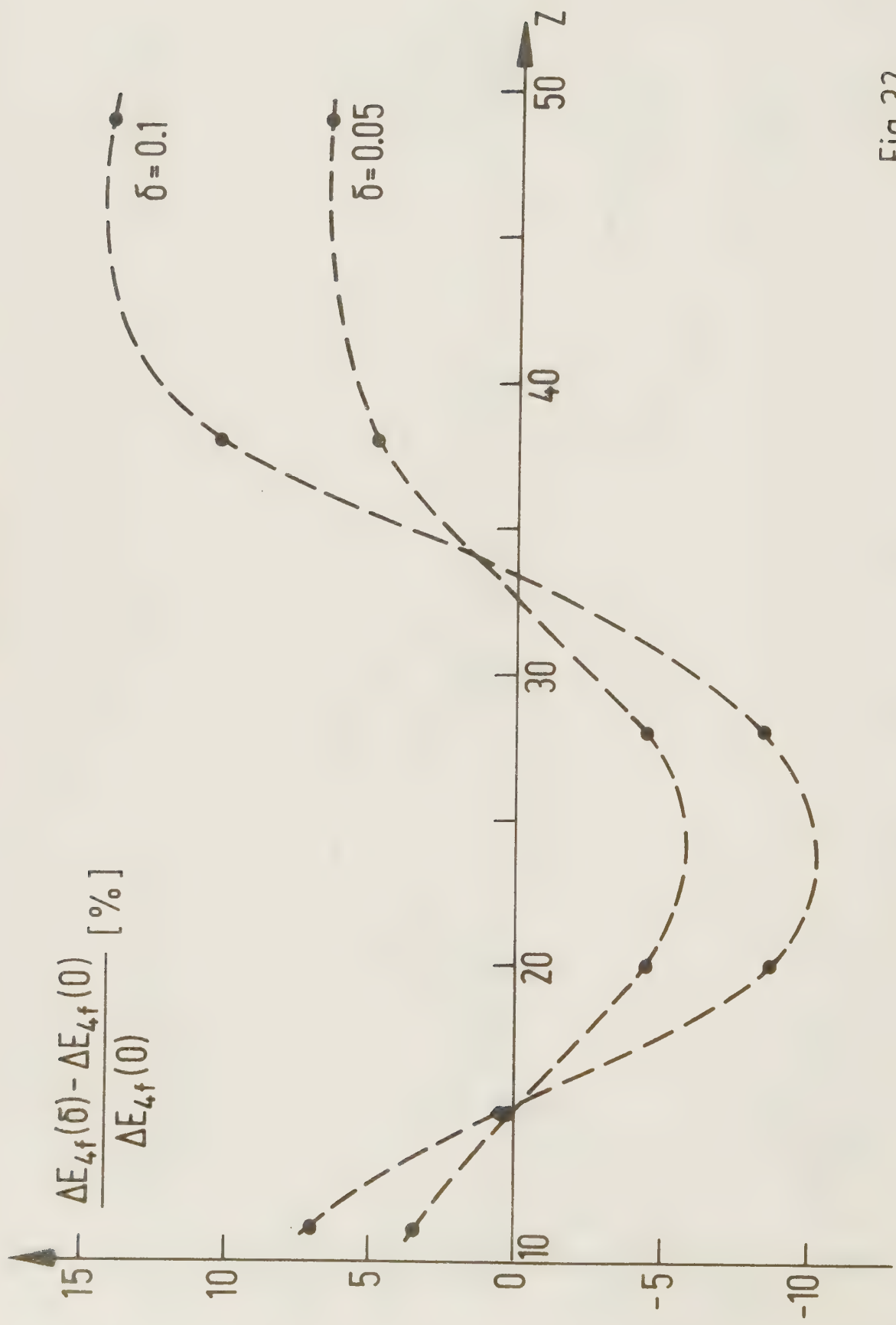


Fig.32

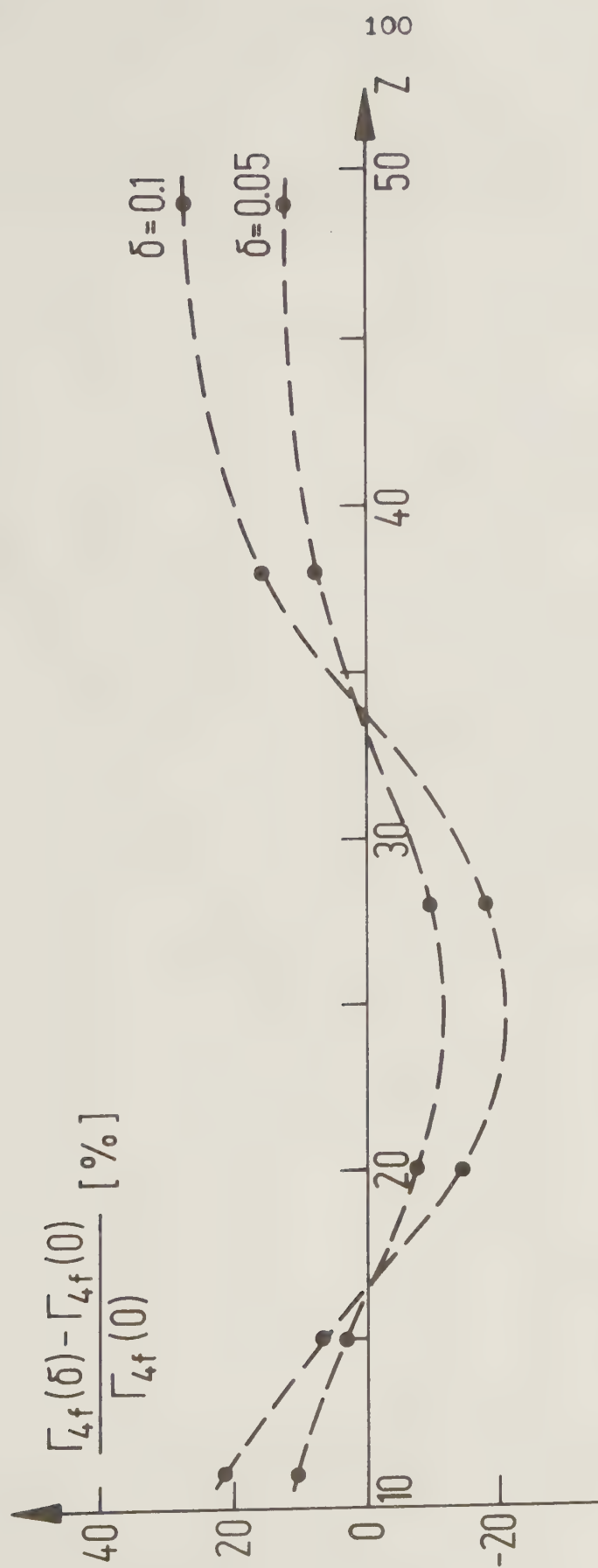


Fig.33

Parameter	Werte mit Pionkondensation	Werte von Backenstoss
$b_0 (\lambda_\pi)$	-0.03	-0.03
$b_1 (\lambda_\pi)$	-0.08	-0.08
$c_0 (\lambda_\pi)^3$	0.23	0.22
$c_1 (\lambda_\pi)^3$	0.18	0.18
$\text{Im } B_0 (\lambda_\pi)^4$	0.04	0.04
$\text{Im } C_0 (\lambda_\pi)^6$	0.08	0.08
δ	0.12	0.
k_0	1.2	0.

Elemente	$\Delta E_{2p} \text{ (kev)}$
$^{27}\text{Al}_{13}$	0.165
$^{31}\text{P}_{15}$	0.337
$^{32}\text{S}_{16}$	0.468
$^{40}\text{Ca}_{20}$	1.37
$^{51}\text{V}_{23}$	2.34
$^{52}\text{Cr}_{24}$	2.90
$^{54}\text{Fe}_{26}$	4.44
$^{60}\text{Ni}_{28}$	5.49
$^{64}\text{Cu}_{29}$	5.74
$^{65}\text{Zn}_{30}$	6.57

Tabelle zur Fig.34

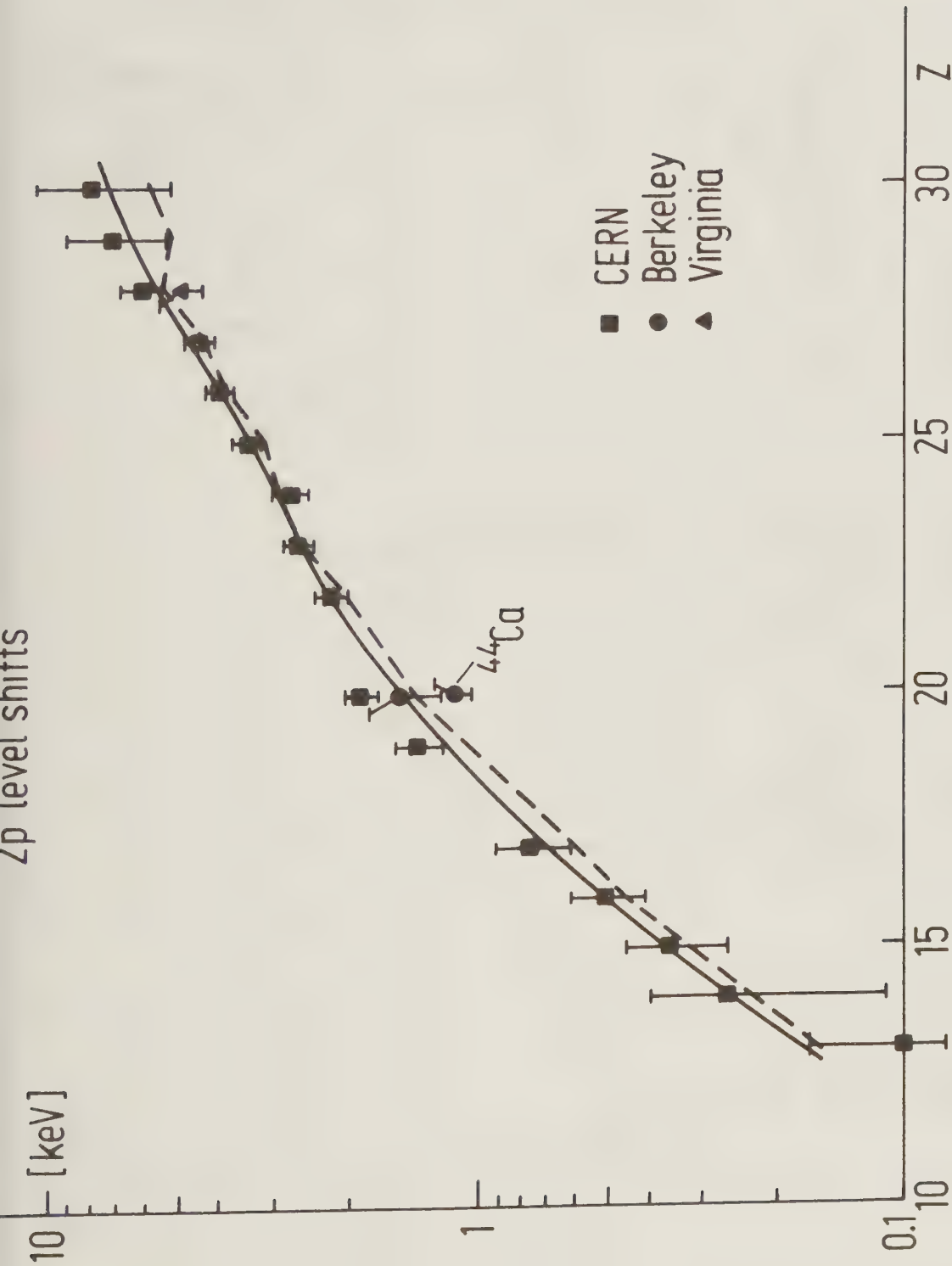


Fig. 34

Parameter	Werte mit Pionkondensation	Werte von Backenstoss
$b_0 (\lambda_\pi)$	-0.03	-0.03
$b_1 (\lambda_\pi)$	-0.08	-0.08
$c_0 (\lambda_\pi)^3$	0.23	0.22
$c_1 (\lambda_\pi)^3$	0.18	0.18
$\text{Im } B_0 (\lambda_\pi)^4$	0.04	0.04
$\text{Im } C_0 (\lambda_\pi)^6$	0.08	0.08
δ	0.15	0.
k_0	1.2	0.

Elemente	$\Delta E_{3d} (\text{keV})$
$^{93}\text{Nb}_{41}$	0.74
$^{115}\text{In}_{49}$	2.64
$^{133}\text{Cs}_{55}$	5.57
$^{141}\text{Pr}_{59}$	8.57

Tabelle zur Fig.35

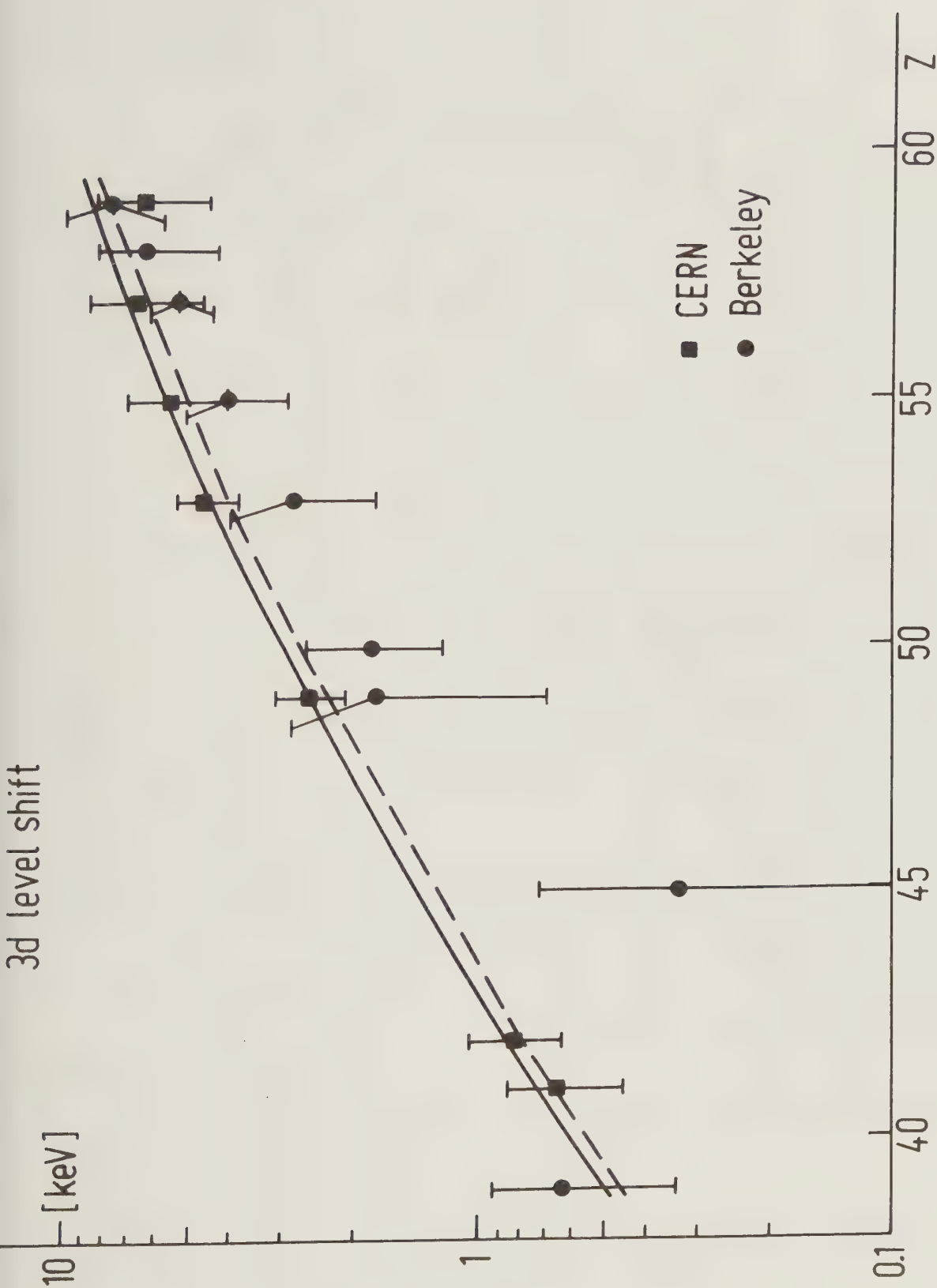


Fig. 35

Parameter	Werte mit Pionkonsation	Werte von Backenstoss
$b_0 (\lambda_\pi)$	-0.03	-0.03
$b_1 (\lambda_\pi)$	-0.08	-0.08
$c_0 (\lambda_\pi)^3$	0.23	0.22
$c_1 (\lambda_\pi)^3$	0.18	0.18
$\text{Im } B_0 (\lambda_\pi)^4$	0.04	0.04
$\text{Im } C_0 (\lambda_\pi)^6$	0.08	0.08
δ	0.20	0.
k_0	1.3	0.

Elemente	ΔE_{4f} (kev)
$^{181}\text{Ta}_{73}$	0.59
$^{197}\text{Au}_{79}$	1.11
$^{208}\text{Pb}_{82}$	1.61
$^{238}\text{U}_{92}$	4.97
$^{248}\text{Pu}_{94}$	6.04

Tabelle zur Fig.36

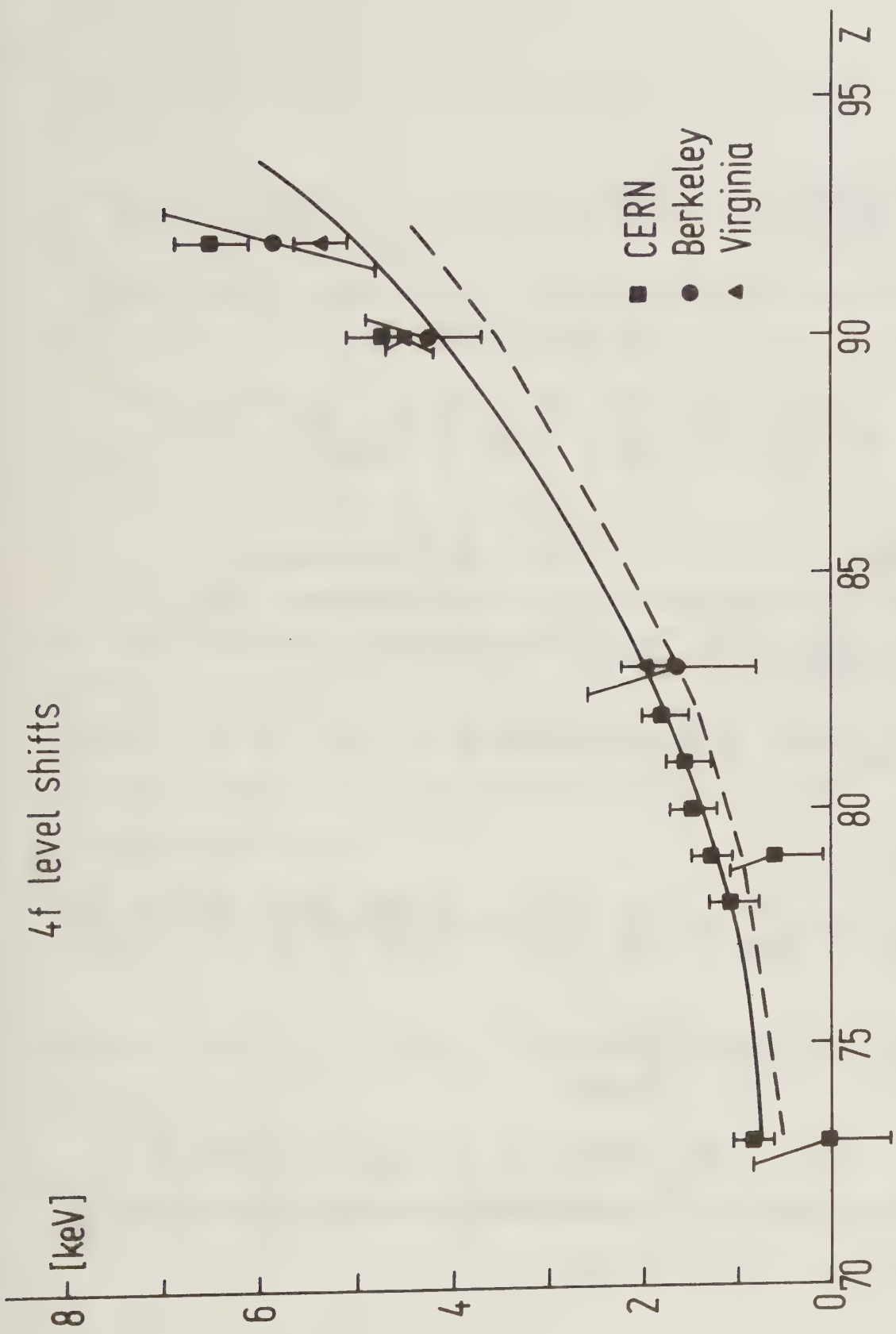


Fig.36

A N H A N G I

Der Ansatz von Ericson

Die Klein-Gordon-Gleichung (3,9) für das pionische Atom (Kap.3, S.32) hat die Form:

$$\left\{ \nabla^2 + [(E - V_c)^2 - \mu_R^2] \right\} \Psi = U_{\pi A} \Psi \quad (I, 1)$$

μ_R ist die reduzierte Masse $\mu_R = \mu / (1 + \mu/M)$
wobei M die Kernmasse und μ die Pionenmasse ist.

Das Potential der starken Wechselwirkung ist:

$$U_{\pi A}(\vec{r}) = g(\vec{r}) + \nabla \alpha(\vec{r}) \nabla \quad (I, 2)$$

mit

$$g(\vec{r}) = U_{\pi A}^{(s)} = -\frac{4\pi}{2\mu_R} \left\{ b_0 \rho(\vec{r}) + b_1 (\rho_n(\vec{r}) - \rho_p(\vec{r})) + B_0 \rho^2(\vec{r}) \right\} ;$$

$$\alpha(\vec{r}) = \frac{\alpha_0(\vec{r})}{1 + \frac{1}{3} \int \alpha_0(\vec{r})}$$

$$\alpha_0(\vec{r}) = 4\pi \left\{ c_0 \rho(\vec{r}) + c_1 (\rho_n(\vec{r}) - \rho_p(\vec{r})) + C_0 \rho^2(\vec{r}) \right\}$$

$\rho_n(\vec{r})$ und $\rho_p(\vec{r})$ sind die Neutronendichte bzw. die Protonendichte und $\rho(\vec{r}) = \rho_n + \rho_p$.

Setzt man die Gleichung (I,2) in Gl.(I,1) ein, so erhält man:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = [g(\vec{r}) - (E - V_c)^2 + \mu_R^2] \psi(\vec{r}) + \nabla(\alpha(\vec{r}) \nabla \psi(\vec{r}))$$

Nach einer einfachen Umformung kommt man zu:

$$(1 - \alpha(\vec{r})) \nabla^2 \psi(\vec{r}) - [g(\vec{r}) - (E - V_c)^2 + \mu_R^2] \psi(\vec{r}) + \nabla \alpha(\vec{r}) \cdot \nabla \psi(\vec{r}) = 0 \quad (\text{I}, 3)$$

Wir beschränken uns auf kugelsymmetrische Kerne und gehen zu Kugelkoordinaten über. Dann sind $\alpha(\vec{r})$ und $\beta(\vec{r})$ nur noch von $|\vec{r}|$ abhängig und ℓ ist eine gute Quantenzahl. Wir können daher für die Wellenfunktionen einen Produktansatz machen:

$$\psi(\vec{r}) = \phi_\ell(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

Nach dem Ansatz nach Ericson [18] schreiben wir für den Radialanteil:

$$R_\ell(r) = r \phi_\ell(r) = \tilde{u}_\ell(r) (1 - \alpha(r))^{-1/2} \quad (\text{I}, 4)$$

Dann erhält man für den Radialanteil folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 R_\ell(r) &= \nabla^2 (\tilde{U}_\ell(r) (1-\alpha(r))^{-1/2}) \\
 &= \nabla^2 \tilde{U}_\ell (1-\alpha(r))^{-1/2} + \nabla \tilde{U}_\ell(r) (1-\alpha(r))^{-3/2} (\nabla \alpha(r)) \\
 &\quad + \frac{3}{4} \tilde{U}_\ell(r) (1-\alpha(r))^{-5/2} (\nabla \alpha(r))^2 + \frac{1}{2} \tilde{U}_\ell (1-\alpha(r))^{-1/2} (\nabla^2(r))
 \end{aligned}
 \tag{I, 5}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \alpha(r) \cdot \nabla R_\ell(r) &= \nabla \alpha(r) \cdot \nabla (\tilde{U}_\ell(r) (1-\alpha(r))^{-1/2}) \\
 &= \nabla \tilde{U}_\ell(r) \cdot (1-\alpha(r))^{-1/2} (\nabla \alpha(r)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \tilde{U}_\ell(r) (1-\alpha(r))^{-3/2} (\nabla \alpha(r))^2
 \end{aligned}
 \tag{I, 6}$$

Setzt man Gleichung (I,4) in Gl.(I,3) ein und benutzt die Formeln (I,5) und (I,6), so erhält man für den Radialanteil:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{1-\alpha(r)} \left\{ \frac{1}{2} \alpha''(r) + \frac{\alpha'(r)}{r} + \left(\frac{1}{2} \alpha'(r) \right)^2 \frac{1}{1-\alpha(r)} \right. \right. \\
 \left. \left. - g(r) - (E - V_c)^2 + \mu^2 \right\} \right] \tilde{U}_\ell(r) = 0
 \end{aligned}
 \tag{I, 7}$$

Wir erhalten also Gleichung (3,11):

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - [1-\alpha(r)]^{-1} \left\{ \frac{\alpha'(r)}{r} + \frac{1}{2}\alpha''(r) + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{1}{2}\alpha'(r) \right)^2 [1-\alpha(r)]^{-1} + \beta(r) \right\} \right] \hat{u}_\ell(r) = 0$$

mit $\beta(r) = [(E - V_c(r))^2 - \mu^2] - g(r)$

A N H A N G I I

Die numerische Bestimmung der Energieeigenwerte

Wir wollen die Gleichung (3,11) numerisch lösen. Dazu können wir diese Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\frac{d^2}{dn^2} \tilde{u}_\ell(n) = A(n) \tilde{u}_\ell(n) \quad (\text{II, 1a})$$

$$\text{mit } A(n) = \frac{\ell(\ell+1)}{n^2} + [1-\alpha(n)]^{-1} \left\{ \frac{\alpha'(n)}{n} + \frac{1}{2}\alpha''(n) + \left(\frac{1}{2}\alpha'(n)\right)^2 [1-\alpha(n)]^{-1} + (E-V_c)^2 - \mu^2 - g(n) \right\}$$

Die Differentialgleichung (II,1a) ist eine Dgl. 2. Ordnung (ohne die 1. Ableitung). Für eine numerische Integration ist das Numerov-Verfahren [44] günstig. Wir verwenden eine Hilfsfunktion:

$$\xi(n) \equiv \tilde{u}_\ell(n) - (h^2/12) \cdot A(n) \cdot \tilde{u}_\ell(n) \quad (\text{II, 2})$$

dabei ist h die Schrittweite.

Man definiert

$$\xi_{i-1} = \xi(r_{i-1}) \quad \text{und} \quad \xi_i = \xi(r_i)$$

Die Rekursionsformel nach Numerov lautet dann:

$$\xi_{i+1} = \left[2 + \frac{R^2 A_i}{1 - (R^2/12) A_i} \right] \xi_i - \xi_{i-1} \quad (\text{II}, 3)$$

Als Anfangswerte nehmen wir:

$$\xi_0 = 0 \quad \xi_1 = C \quad \text{für } l \neq 1$$

$$\xi_0 = -0.2C \quad \xi_1 = C \quad \text{für } l = 1$$

dabei kann man C frei wählen (Integrationskonstante).

Die Differentialgleichung (II,1) wird von innen und von außen bis zu einem Punkt in der Nähe des Kernrandes numerisch integriert. Die logarithmische Stetigkeit der Wellenfunktion ist die Bedingung für den Energieeigenwert.

Ein Iterationsverfahren dazu gibt Blatt [43]. Er schätzt den Energieeigenwert E mit folgender Formel ab:

$$E \approx Q - \frac{v(r_0) (v'_R - v'_L)}{\int [v(r)]^2 dr} \quad (\text{II}, 4)$$

Dabei ist Q ein Anfangswert für die Energie.

$v(r)$ ist die dazugehörige Wellenfunktion und v'_L und v'_R sind die Ableitungen der Wellenfunktion von innen und von außen an der Stelle r_0 .

Mit einem Anfangswert für die Energie integrieren wir die Differentialgleichung (II,1) von innen und von außen nach dem Numerov-Verfahren, wobei die Konstante C_{innen} bzw. $C_{\text{außen}}$ so gewählt wird, daß die Wellenfunktion stetig ist. Mit der Abschätzung nach Gleichung (II,4) erhält man einen besseren Wert für die Energie. Dieses Verfahren wiederholt man so lange, bis die beiden Ableitungen ψ_L' und ψ_R' gleich sind.

Diese Methode konvergiert recht schnell, da man im Komplexen rechnen kann und die Numerov-Methode keine aufwendige Berechnung der Ableitung benötigt. Nachteilig ist, daß man einen guten Anfangswert für die Energie braucht, damit das Programm gegen den richtigen Energiewert konvergiert.

A N H A N G I I I

Die Normierung der Dichte und die Bestimmung des
Halbwertradius

Wir wollen die Dichte aus Gleichung (5,5) (Kap.5, S.48) neu normieren. Mit dem neuen Normierungsfaktor N hat die Gleichung die Form:

$$\rho(r) = N \rho_0(r) \left(1 + \delta \frac{\sin(2k_0 r)}{2k_0 r} \right) \quad (\text{III}, 1)$$

ρ_0 ist eine Fermiverteilung:

$$\rho_0 = \frac{\tilde{N}}{1 + \exp(4 \ln 3 \frac{\hbar \cdot c}{r})} \quad (\text{IV}, 2)$$

Dabei ist C der Halbwertradius und t die Oberflächendichte. $\tilde{N}$ ist die alte Normierungskonstante:

$$4\pi \int_0^{\infty} \rho_0(r) r^2 dr = Z \quad (\text{IV}, 3)$$

Mit der Protonen- bzw. Neutronenzahl Z.

Für $\tilde{N}$ gilt:

$$\tilde{N} = \frac{3Z}{4\pi} \frac{1}{C^3 + \left(\frac{\pi t}{4 \ln 3}\right)^2 C} \quad (\text{IV}, 4)$$

Die neue Dichteverteilung muß auch die Normierungsbedingung (III,3) erfüllen:

$$\begin{aligned}
 4\pi \int \rho(r) r^2 dr &= 4\pi N \int \rho_0(r) \left[1 + \delta \frac{\sin(2k_0 r)}{2k_0 r} \right] r^2 dr \\
 &= Z
 \end{aligned}
 \tag{III,5}$$

Daraus ergibt sich:

$$N \left\{ 4\pi \int \rho_0(r) r^2 dr + 4\pi \delta \int \rho_0 \frac{\sin(2k_0 r)}{2k_0 r} r^2 dr \right\} = Z
 \tag{III,6}$$

Da ρ_0 normiert ist, erhält man:

$$N = \frac{Z}{Z + 4\pi \delta \int \rho_0 \frac{\sin(2k_0 r)}{2k_0 r} r^2 dr}
 \tag{III,7}$$

Das Integral berechnen wir numerisch nach dem Gauß-Verfahren und erhalten damit N.

Wir müssen außerdem einen neuen Halbwertradius C so bestimmen, der mittlere quadratische Radius der neuen und der alten Verteilung gleich sind:

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int \rho_0(r) r^4 dr \quad (\text{III}, 8)$$

Setzt man $\rho(r)$ ein, so erhält man:

$$\langle r^2 \rangle - \frac{4\pi\delta}{(1-N)} \int \rho_0(r) \frac{\sin(2k_0 r)}{2k_0 r} r^4 dr = 0 \quad (\text{III}, 9)$$

Für N benutzen wir Gleichung (III,7). Mit einem numerischen Nullstellenprogramm wird der Halbwertradius C in ρ_0 so lange variiert, bis Gleichung (III,9) erfüllt ist.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S
=====

1. W.Pieper and W.Greiner, z.Physik (1969) 218
2. A.Klein and J.Rafelski, "Instabilities of Matter
in strong external fields and at high density"
Preprint - Deptm. of Physics, Univ. of Penns.
(UPR 0030 N)
3. A.Klein and J.Rafelski, "Bose condensation in
supercritical external fields"
Preprint - Deptm. of Physics, Univ. of Penns.
(UPR 0036 N)
4. B.Müller, J.Rafelski and W.Greiner, Z.Physik (1972) 62
5. B.Müller, J.Rafelski and W.Greiner, Z.Physik (1972) 183
6. J.Rafelski, B.Müller and W.Greiner, Nucl.Phys.
B 68 (1974) 585
7. B.Müller, H.Peitz, J.Rafelski and W.Greiner,
Phys.Rev.Lett. 28 (1972) 1235
8. J.Reinhardt, G.Soff and W.Greiner, Z.Physik
A 276 (1976) 285
9. Kim, "Mesic atoms and nuclear structure" (1971)
10. B.Fricke, Z.Physik 218 (1969) 495

11. Kisslinger, Phys.Rev. 98 (1955) 761
12. S.Deser, M.L.Goldberger, K.Baumann and W.Thirring,
Phys.Rev. 96 (1954) 744
13. Seki and A.H.Cromer, Phys.Rev. 156 (1967) 93
14. K.A.Brückner, Phys.Rev. 156 (1967) 93
15. D.D.Ivanenko and G.E.Pustovalov,
Usp.Fiz.Nauk. 61 (1957) 27
16. L.P.Fulcher, J.M.Eisenberg and J.Le Tourneux,
Can.J.Phys. 45 (1967) 331
17. K.Chung, M.Danus, M.G. Huber, Phys.Lett. 29B (1969) 256
K.Chung, B.Blum, M.G.Huber and M.Danus
Phys.Lett. 32B (1970) 536
K.Chung, M.Danus, M.G.Huber, Z.Physik 240 (1970) 195
18. M.Ericson and T.E.O.Ericson, Ann.Phys. 36 (1966) 323
19. D.K.Anderson, D.A.Jenkins and R.J.Power,
Phys.Rev. 188 (1969) 9
20. M.Krell and T.E.O.Ericson, Nuclear Phys. B11 (1969) 521
21. J.Hüfner, "Pion interact with nuclei"
Sonderdruck des Max-Planck-Institut für
Kernphysik; Heidelberg (1975)

22. B.Blum, Nucl.Phys. B23 (1970) 155
23. G.Backenstoss, Ann.Rev.Nucl.Sci. 20 (1970) 467
24. G.Backenstoss, S.Charalambus, H.Daniel, H.Koch,
G.Poelz, H.Schmitt and L.Tauscher
Phys.Lett. 25B (1967) 365
25. G.Backenstoss, J.Egger, T.v.Egidy, R.Hagelberg,
C.J.Hesslander, H.Koch, H.P.Povel, A.Schwitter
and L.Tauscher, Nucl.Phys. A232 (1971) 519
26. G.Backenstoss, I.Bergström, J.Egger, R.Hagelberg,
C.J.Hesslander, H.Koch, H.P.Povel, R.H.Price,
A.Schwitter and L.Tauscher, Nucl.Phys. B66 (1974) 125
27. A.B.Migdal, Sov.Physics Jept. (1972) vol.34, No.6
28. A.B.Migdal, Phys.Rev.Lett. 31 (1973) 257
29. A.B.Migdal, Nucl.Phys. A210 (1973) 421
30. A.B.Migdal, Phys.Lett. 52B (1974) 264
31. A.B.Migdal, A.O.Markin and I.I.Mishustin
Soviet Phys.Jept. 39 (1974) 212
32. A.B.Migdal, Phys.Lett. 45B (1973) 448
33. M.A.Troitskii, E.E.Sapershtein, A.O.Markin and
I.N.Mishustin, Jet.Lett. Vol.21, No.1, (1975)
34. R.F.Sawyer a. D.J.Scalopino, Phys.Rev. D7 (1973) 953

35. Baym and E.Flower, Nucl.Phys. A222 (1974) 29
36. S.O.Bäckmann and W.Weise, Phys.Lett. 55B (1975) 1
37. V.Ruck, M.Gyulassy and W.Greiner, Z.Physik (1976)A277,391
38. W.Weise and G.E.Brown, Phys.Lett. 48B (1974) 297
W.Weise and G.E.Brown, Phys.Lett. 58B (1975) 300
G.E.Brown and W.Weise, "The role of Δ_{33} - Isobars
in pion condensation and pion scattering",
preprint - Deptm.of Physics State Univ.of N.Y.
39. S.Barmo, "Analytic approximation to the wave
function in pionic atoms", Sonderdruck des
Instituts für theoretische Kernphysik der
Univ. Karlsruhe
40. L.R.B.Elton, In Landolt - Börnstein Numerical
data and functional relationships in science
and tecnology, New Series, ed. K.H.Hellwege
Group I 2:1, Springer Verlag Berlin N.Y.,
Hofstadter, R.Collard H.R. 21
41. Abramowitz and Stegun, Hand-book of math. functions
Dover Publ. N.Y. 1965
42. A.S.Dawydow, Quantenmechanik,VEB Dt.Verl.d.Wissensch.
(1967)
43. I.M.Blatt, J.Comp.Phys. 1 (1967) 382
44. A.Melkanoff, T.Sawada and J.Raynald,Methods in
Computational Physics, Academic Press 1966.

Herrn Prof. Dr. W. Greiner bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und die ständige Unterstützung zu Dank verpflichtet. Ebenso sei Herrn Prof. Dr. W. Scheid und Herrn Prof. Dr. B. Müller für ihre Unterstützung gedankt. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. M. Gyulassy für wertvolle Diskussionen und anregende Gespräche; ebenso Herrn G. Soff und Frau V. Ruck.

Für die Anfertigung und Korrektur des Manuskripts danke ich Herrn D. Kube, Herrn P. Havlicek und Herrn Dr. H. Ruck, Frau Utschig für das Zeichnen der Abbildungen und Herrn Brose für den Druck.

Dem Hochschulrechenzentrum der Universität Frankfurt/M. und Rechenzentrum der G.S.I. in Darmstadt danke ich dafür, daß sie mir die Rechenzeit zur Verfügung gestellt haben.

Herrn Dr. M. Krell danke ich für die Erlaubnis, eine Kopie des Programms PIATOM zu benutzen, das ich von CERN erhielt.

L e b e n s l a u f

Am 30.3.1945 wurde ich als Ältester Sohn von Herrn Ong, Ing-Kiat und seiner Frau Bie-Nio in Modjokerto (Indonesien) geboren. Von 1950 bis 1957 besuchte ich die Min-Kuang Volksschule in Surabaya. Von 1957 bis 1962 war ich Schüler der Chung Hwa High School. 1962 bestand ich dort das chinesische Abitur. 1963 studierte ich an der christlichen Universität "Petra" in Surabaya Hochbau. 1964 legte ich das indonesische Abitur ab. 1964/1965 war ich Student in Djakarta im Fach Elektrotechnik. 1966 kam ich nach Deutschland. Nach einem kurzen Deutschkurs in Arolsen (Hessen) studierte ich ab WS 66/67 Physik an der Universität Frankfurt/M. 1968 bestand ich die Vordiplom-Prüfung. Seit Anfang 1970 arbeite ich bei Prof. Dr. W. Greiner an meiner Diplomarbeit. 1972 bestand ich die Diplom-Hauptprüfung für Physiker. Von Januar bis Oktober 1973 arbeitete ich bei Prof. Dr. Beck an der TH Darmstadt. Ende 1973 kam ich zurück zu Prof. Dr. Greiner und arbeite seither an meiner Doktorarbeit. Meiner akademischen Lehrer waren:

Prof.Dr.W.Greiner, Prof.Dr.W.Scheid, Prof.Dr.M.G.Huber,
Prof.Dr.D.Drechsel, Prof.Dr.H.Bilz, Prof.Dr.G.Süßmann,
Prof.Dr.E.Schopper, Prof.Dr.W.Martienssen, Prof.Dr.Queisser,
Prof.Dr.H.Dänzer, Prof.Dr.H.Müser, Prof.Dr.Gebhardt,
Prof.Dr.P.Royen, Prof.Dr.F.Stummel, Prof.Dr.W.Franz,
Dr.Heinecken, Dr.Neubauer, Prof.Dr.G.Köthe.

